MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Viteza $v(r)$ a sângelui care curge printr-un vas sangvin de rază R și lungime l la distanță r față de axa centrală(a vasului sangvin privit ca un cilindru) este dată de expresia $v(r)=\frac{P}{4\eta l}\left(R^2-r^2\right)$, unde P este diferența dintre presiunile de la capetele vasului iar η este vâscozitatea sângelui.

a) Determinați viteza medie $v_m=\frac{1}{R}\int_0^R v(r)dr$ a sângelui de-a lungul intervalului $[0,R]$.

b) Determinați raportul dintre viteza maximă a sângelui, $v_{\max}$ și v_m.

SOLUȚIE:

a) $v_m=\frac{1}{R}\int_0^R \frac{P}{4\eta l}\left(R^2-r^2\right)dr=\frac{1}{R}\cdot\frac{P}{4\eta l}\cdot\left(R^2\int_0^R dr-\int_0^R r^2dr\right)=\frac{PR^2}{6\eta l}$ 3p

b) $v_{\max}=\frac{PR^2}{4\eta l}$ 3p

$\frac{v_{\max}}{v_m}=\frac{3}{2}$ 1p

Problema 2.

Se consideră un polinom $f\in\mathbb{Z}[X]$.

a) Demonstrați că $\left(f(a)-f(b)\right)\vdots(a-b),(\forall)a,b\in\mathbb{Z}.$

b) Dacă $f(2018)=2019^{2018}$ și $f(2019)=2019^{2019}$, demonstrați că *f* nu are rădăcini întregi.

SOLUȚIE:

a) $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1x+a_0, a_n\neq 0$ 1p

Justificare $\left(f(a)-f(b)\right)\vdots(a-b),(\forall)a,b\in\mathbb{Z}.$ 1p

b) Presupunem prin reducere la absurd că există $x_0\in\mathbb{Z},$ astfel încât $f(x_0)=0.$ 1p

Din subpunctul **a)** $\left(f(2018)-f(x_0)\right)\vdots(2018-x_0)$, adică $2019^{2018}\vdots(2018-x_0)$.

$\left(f(2019)-f(x_0)\right)\vdots(2019-x_0)$ adică $2019^{2019}\vdots(2019-x_0)$. 2p

$2018-x_0, 2019-x_0$ sunt două numere consecutive, așadar unul dintre ele este par........ 1p

Cum $2019^{2018}, 2019^{2019}$ sunt impare, conchidem că *f* nu are rădăcini întregi........ 1p

Problema 3.

Se consideră o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$. Verificați dacă există primitive F ale funcției f, cu proprietatea că $F(x)\cdot F(1-x)=F\left(x^2\right)$.

SOLUȚIE:

$F'(x)\cdot F(1-x)-F(x)F'(1-x)=2xF'\left(x^2\right)$ 3p

Cum $F'(x)=f(x)$, avem că $f(x)\cdot F(1-x)-F(x)f(1-x)=2xf\left(x^2\right)$ 1p

Pentru $x=0$, obținem că $f(0)\cdot F(1)-f(1)\cdot F(0)=0$ 1p

Pentru $x=1$, obținem că $f(1)\cdot F(0)-f(0)\cdot F(1)=2f(1)$ 1p

Obținem că $f(1)=0$ (contradicție).. 1p

Problema 4. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(-1)^{[x]}\left(x-2\cdot\left[\frac{x}{2}\right]-1\right)+1$. (Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real *a*).

a) Demonstrați că $f(x+2)=f(x),(\forall)x\in[0,\infty)$.

b) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$ și $\int_0^{2018} f(x)dx$.

SOLUȚIE:

a)

$$f(x+2)=(-1)^{[x+2]}\left(x+2-2\cdot\left[\frac{x+2}{2}\right]-1\right)+1=(-1)^{[x]}\left(x+2-2\cdot\left[\frac{x}{2}+1\right]-1\right)+1=$$

$$=(-1)^{[x]}\left(x+\cancel{2}-2\cdot\left[\frac{x}{2}\right]-\cancel{2}-1\right)+1=f(x)$$ 2p

b) $\int_0^2 f(x)dx=1$ 2p

$\int_0^{2018} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+...+\int_{2016}^{2018} f(x)dx.$ 1p

Din faptul că funcția *f* este periodică de perioadă $T=2$, obținem că $\int_0^{2018} f(x)dx=1009.$ 2p

***Notă:** Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*