MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Să presupunem că n este un număr natural impar. La început, Andrei scrie pe tablă numerele $1,2,3,...,2n$. Apoi procedează astfel: alege la întâmplare două numere a și b dintre cele scrise, le șterge și adaugă pe tablă numărul $|a-b|$.Andrei aplică acest procedeu în mod repetat, până când pe tablă este scris un singur număr. Demonstrați că acest ultim număr este impar.

SOLUȚIE:

Notăm cu S suma numerelor existente pe tablă la un moment dat. La început, $S=1+2+3+...+2n=n(2n+1)$ este un număr impar 3p

Fiecare pas micșorează S cu $2\cdot\min\{a,b\}$, care este număr par............ 3p

Deoarece la început S este număr impar, rezultă că S este număr impar și la final............ 1p

Problema 2.

Să se demonstreze că numărul $\underbrace{111...1}_{2019}\underbrace{222...2}_{2019}$ poate fi scris ca produsul a două numere naturale consecutive.

SOLUȚIE:

$\underbrace{111...1}_{2019}\underbrace{222...2}_{2019}=10^{4037}+10^{4036}+...+10^{2019}+2\cdot(10^{2018}+10^{2017}+...+1)$ 1p

$=10^{2019}\cdot(10^{2018}+10^{2017}+...+1)+2\cdot(10^{2018}+10^{2017}+...+1)=(10^{2018}+10^{2017}+...+10+1)(10^{2019}+2)=$

$=\dfrac{10^{2019}-1}{9}(10^{2019}+2)=\dfrac{10^{2019}-1}{3}\left(\dfrac{10^{2019}-1}{3}+1\right)$ 3p

$\dfrac{10^{2019}-1}{3}\in\mathbb{N}$ 2p

Finalizare 1p

Problema 3.

Un corp este lansat sub un unghi α față de orizontală, cu viteza v_0. Corpul atinge pământul după 10 secunde la o distanță de $500\sqrt{3}$ m. Știind că $x(t) = tv_o \cos\alpha\,, y(t) = tv_o \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ $(g \approx 10\ m/s^2)$, unde $x(t)$ este distanța parcursă pe orizontală la momentul t și $y(t)$ este înălțimea la care se găsește corpul la momentul t. Să se calculeze:

a) viteza inițială v_0 și unghiul α ;

b) înălțimea maximă la care a ajuns corpul ;

c) unghiul α sub care trebuie lansat corpul astfel încât distanța la care lovește pământul să fie maximă și determinați această distanță.

SOLUȚIE:

a) $y(10) = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha \cdot 10 - \frac{10 \cdot 10^2}{2} = 0 \Rightarrow v_0 \sin\alpha = 50\ m/s$ 1p

$x(10) = 500\sqrt{3} \Rightarrow 10v_0 \cos\alpha = 500\sqrt{3} \Rightarrow v_0 \cos\alpha = 50\sqrt{3}\ m/s$ 1p

$(v_0 \sin\alpha)^2 + (v_0 \cos\alpha)^2 = v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{50^2 + \left(50\sqrt{3}\right)^2} = 100\ m/s\,, \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 30°$......... 1p

b) Înălțimea maximă este atinsă pentru $t = -\frac{v_0 \sin\alpha}{-\frac{g}{2} \cdot 2} = 5\ s$ 1p

$y(5) = 5 \cdot 50 - \frac{10 \cdot 25}{2} = 125\ m$ 1p

c) $y(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ 1p

Distanța maximă se obține cînd $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow$ Distanța maximă este egală cu $\frac{100^2 \cdot 1}{10} = 1000\ m = 1\ km$ 1p

Problema 4.

Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctele $M \in (BC), N \in (CD), P \in (DA), Q \in (AB)$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{ND} = \frac{PD}{PA} = \frac{QA}{QB} = \mu$.

a) Să se arate că dacă $\mu = 1$, atunci $MNPQ$ este paralelogram.

b) Dacă $MNPQ$ este paralelogram și $\mu \neq 1$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

SOLUȚIE:

a) MQ este linie mijlocie în ΔABC și NP este linie mijlocie în ΔACB 1p

$MQ \parallel AC, NP \parallel AC \Rightarrow MQ \parallel NP$ 1p

$MQ = \frac{1}{2}AC, NP = \frac{1}{2}AC, MQ = NP$ 1p

Deduce că $MNPQ$ paralelogram 1p

b) Fie O un punct oarecare.

$MNPQ$ este paralelogram$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\mu}\left((1-\mu)\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{1+\mu}\left((\mu-1)\overrightarrow{OA} - \mu\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$.. 1p

$(1-\mu)\overrightarrow{OC} - (1-\mu)\overrightarrow{OB} = (1-\mu)\overrightarrow{OD} - (1-\mu)\overrightarrow{OA} \Rightarrow (1-\mu)\overrightarrow{BC} = (1-\mu)\overrightarrow{AD}$............................. 1p

Cum $\mu \neq 1 \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram.. 1p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*