CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Considerând ecuația $2xy-4x+5y-2029=0$, $x, y\in\mathbb{R}$, se cere:

a) Să de determine o soluție $(x;y)$ a ecuației, cu x și y numere naturale.

b) Să se arate că ecuația are un număr finit de soluții $(x;y)$, cu x și y numere întregi.

c) Să se demonstreze că ecuația dată are o infinitate de soluții $(x;y)$, cu x și y numere reale iraționale.

SOLUȚIE:

Ecuația se poate scrie în forma $(2x+5)(y-2)=2019$ sau $y=\dfrac{4x+2029}{2x+5}$ 2p

a) De exemplu, $y-2=1$, $2x+5=2019$ $\Rightarrow$ $(x;y)=(1007;3)$ verifică ecuația 2p

b) Dacă $x,\ y\in\mathbb{Z}$ și $(x;y)$ verifică ecuația, atunci $(2x+5)$ și $(y-2)$ sunt numere întregi și totodată sunt printre divizorii întregi ai lui 2019, deci ecuația are număr finit de soluții. 1p

c) Putem considera alegerea $2x+5=a\sqrt{2}$ și $y-2=\dfrac{2019}{a\sqrt{2}}$, cu $a\in\mathbb{Q}^*$...2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 2.
Un grădinar are o grădină în care a plantat parcele cu tufe de trandafiri. Într-o zi el are de realizat un aranjament floral din trandafiri. Pentru aceasta, el taie un trandafir din prima parcelă, doi din a doua parcelă și începând cu a treia parcelă taie de fiecare dată un număr de trandafiri egal cu totalul numărului de trandafiri tăiați din parcelele anterioare, continuând astfel până la ultima parcelă. Notând a_n numărul trandafirilor tăiați din parcela cu numărul $n \in \mathbb{N}^*$, se cere:

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 3}$ este progresie geometrică.
b) Determinați numărul minim de flori pe care trebuie să îl aibă parcela cu numărul 8 în condițiile enunțate.
c) Determinați câte parcele cu tufe de trandafiri are grădinarul știind că pentru realizarea aranjamentului floral a folosit 3072 trandafiri.

SOLUȚIE:

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $(\forall) n \geq 2$ 1p
$a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = a_n$, $(\forall) n \geq 3$ $\Rightarrow$ $a_{n+1} = 2a_n$, $(\forall) n \geq 3$ 1p
deci $(a_n)_{n\geq 3}$ este progresie geometrică de rație $q = 2$ și prim termen $a_3 = 3$ 1p

b) $a_8 = 96$ 2p

c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$, $(\forall) n \geq 3$ și $a_1 + a_2 + ... + a_n = 3072$ 1p
$\Rightarrow$ $a_{n+1} = 3072$, $n = 12$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX –a

Problema 3.

a) Demonstrați inegalitatea $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, $(\forall)a,b \in [0;+\infty)$

b) Considerând $f:[2;10] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}$, determinați mulțimea $M=\{x \in [2;10] / f(x) \in \mathbb{N}\}$.

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{ab}$ 1p

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$ 2p

b) Fie $a=x-2$, $b=10-x$, $x \in [2;10]$ și evident, având $a,b \in [0;+\infty)$, se verifică inegalitatea cerinței a) obținând astfel $2\sqrt{2} \le \sqrt{x-2}+\sqrt{10-x} \le 4$ 1p

$f(x) \in \left[2\sqrt{2};4\right] \cap \mathbb{N} \Rightarrow f(x) \in \{3;4\}$ 1p

$f(x)=3 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{12 \pm 3\sqrt{7}}{2}$ 1p

$f(x)=4 \Rightarrow x=6$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 4.

În triunghiul ABC, considerăm punctul $D \in BC$, cu C între B și D încât $CD = 2BC$, respectiv punctul E încât $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE}$. Dacă F este intersecția dreptelor AB și DE iar $k = \frac{EF}{FD}$, demonstrați următoarele afirmații:

a) $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AE}$;

b) $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2(1+k)}\overrightarrow{BA} + \frac{6k-1}{2(1+k)}\overrightarrow{BC}$;

c) $k = \frac{1}{6}$.

SOLUȚIE:

a) $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA}$ 2p

b) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 1p

$\overrightarrow{FD} = \frac{FD}{ED}\overrightarrow{ED} = \frac{1}{k+1}\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{k+1}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{2}\overrightarrow{BC}\right)$ 1p

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = \frac{3}{2(1+k)}\overrightarrow{BA} + \frac{6k-1}{2(1+k)}\overrightarrow{BC}$ 1p

a) $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BA}$ coliniari....................1p

$6k-1=0$ 1p