



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘIETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

Problema 1.

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ și submulțimea $N = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2) \mid X^2 = O_2\}$.

a) Verificați că $O_2 \in N$, $A_2 \in N$ și $I_2 \notin N$.b) Aflați numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.c) Dacă $B \in N$, $B = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$, arătați că $\text{Tr}B = \hat{0}$ și $\det B = \hat{0}$ (unde $\text{Tr}B = \hat{a} + \hat{d}$ și $\det B = \hat{a}\hat{d} - \hat{b}\hat{c}$).d) Aflați cardinalul mulțimii N .e) Găsiți o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care nu se poate scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea N .**Problema 2.**Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$.Demonstrați $f(n) \neq 31$, oricare ar fi numărul întreg n .**Problema 3.**a) Să se arate că $\int_{-1}^1 \ln(x^2 + x + 1) dx = \int_{-1}^1 \ln(x^2 - x + 1) dx$.b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \ln(x^4 + x^2 + 1) dx$.**Problema 4.**

Teodor amenajează un loc de joacă pentru hamsterul său, în forma unui triunghi isoscel ABC cu vârful A fixat, iar vârfurile B , C variabile astfel încât $AB = AC = 1$, $BC = 2x$, $x \in (0, 1)$. În interiorul triunghiului ABC Teodor plasează, într-un punct I aflat la egală distanță de laturi, un mic rezervor cu apă pentru hamster. Notăm cu r distanța de la I la cele trei laturi ale triunghiului ABC . Aflați valoarea maximă posibilă a numărului r .

(Toate distanțele din problemă sunt măsurate în metri).