MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor pătratice de ordin 3 care au ca elemente numere reale strict pozitive.

a) Arătaţi că mulţimea $\mathcal{M}$ conţine atât matrice inversabile, cât şi matrice neinversabile.

b) Demonstraţi că nu există nicio matrice inversabilă în $\mathcal{M}$ care să aibă ca inversă tot o matrice din $\mathcal{M}$.

SOLUŢIE:

a) De exemplu, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ este matrice inversabilă, iar $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ este neinversabilă. 4p

b) Presupunem, prin absurd, că există două matrice A, B din $\mathcal{M}$, una inversa celeilalte.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \dots & m & \dots \\ \dots & n & \dots \\ \dots & p & \dots \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} \dots & am+bn+cp & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = I_3$.

Obţinem că $am+bn+cp=0$, contradicţie (cantitatea din stânga este strict pozitivă). 3p

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$. Pentru un număr natural dat n, determinaţi valoarea minimă a numărului $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge mulţimea numerelor reale.

SOLUŢIE:

Avem: $\det\left(A^n\right) = \left(\det A\right)^n = \left(x^2+2x\right)^n$. 1p

Imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x$ este intervalul $[-1,\infty)$. 2p

Dacă n este par, mulţimea valorilor expresiei $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge $\mathbb{R}$, este $[0,\infty)$. Valoarea minimă a expresiei este 0 şi se atinge pentru $x\in\{-2,0\}$. 2p

Dacă n este impar, mulţimea valorilor expresiei $\det\left(A^n\right)$, atunci când x parcurge $\mathbb{R}$, este $[-1,\infty)$. Valoarea minimă a expresiei este -1 şi se atinge pentru $x=-1$. 2p

Problema 3.

Spunem că funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ este *bună* dacă are proprietăţile (i), (ii) şi (iii):

(i) *f* este derivabilă;

(ii) $f(-2)\cdot f(2)>0$;

(iii) mulţimea $\mathrm{A}=\{x\in(-2,2)\mid f(x)=0\}$ are cardinalul egal cu 3.

a) Daţi un exemplu de funcţie bună, scriind legea sa de corespondenţă.

b) Demonstraţi că orice funcţie bună *f* are un punct de extrem local care aparţine mulţimii A.

SOLUŢIE:

a) De exemplu, se demonstrează că funcţia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-2x^2$ este bună. 3p

b) Fie $\mathrm{A}=\{a,b,c\}$, cu $-2<a<b<c<2$. Presupunem, prin reducere la absurd, că niciunul dintre elementele lui A nu este punct de extrem local pentru funcţia *f*. Rezultă că *f* îşi schimbă semnul de fiecare dată când trece printr-un zerou. 2p

Avem: $f(-2)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f\left(\frac{b+c}{2}\right)<0, f\left(\frac{b+c}{2}\right)\cdot f(2)<0$. Înmulţind membru cu membru aceste relaţii, obţinem că $f(-2)\cdot f(2)\cdot f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f^2\left(\frac{b+c}{2}\right)<0$, contradicţie. 2p

Problema 4.

Laturile *OA* şi *OB* ale unghiului drept $\sphericalangle AOB$ reprezintă două şosele în deşert. În punctul *P*, interior unghiului $\sphericalangle AOB$, există o oază; distanţa de la *P* la dreapta *OA* este de 1 km, iar distanţa de la *P* la dreapta *OB* este de 8 km. Dorim să construim o şosea rectilinie, care să treacă prin *P*, unind punctele *M* de pe semidreapta *OA* şi *N* de pe semidreapta *OB*. Determinaţi distanţele *OM* şi *ON*, astfel încât şoseaua (segmentul) *MN* să aibă lungime minimă.

SOLUŢIE:

Notăm cu *S* şi *T* proiecţiile punctului *P* pe *OA*, respectiv *OB*; avem *OS* = *PT* = 8km şi *OT* = *PS* = 1km. Punctele *M*, *N* şi *P* fiind coliniare, triunghiurile *TNP* şi *SPM* sunt asemenea. Fie $NT=x$ (km); evident că $x>0$ şi obţinem că $MS=\frac{8}{x}$ (km).

Avem: $MN^2=OM^2+ON^2=$

$=\left(8+\frac{8}{x}\right)^2+(1+x)^2=(x+1)^2\left(1+\frac{64}{x^2}\right)$. 3p

Pentru a minimiza lungimea segmentului *MN*, trebuie să determinăm punctul de minim al funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2\left(1+\frac{64}{x^2}\right)$. Cum *f* este derivabilă, $f'(x)=\frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$ pentru $x\in(0,\infty)$ şi $f'(x)<0,\forall x\in(0,4)$, $f'(4)=0, f'(x)>0,\forall x\in(4,\infty)$, rezultă că $x_0=4$ este unicul punct de minim al lui *f*.
.... 3p

Distanţele cerute sunt $ON=x+1=5$ km şi $OM=8+\frac{8}{x}=10$ km. 1p