MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X –a

Problema 1.

a) Câte funcţii injective $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ există?

b) Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+\log_2 x+x$,

i) Demonstraţi că funcţia f este injectivă;

ii) Rezolvaţi inecuaţia: $f(x)\le 22$.

SOLUŢIE:

a) $A_{10}^4=5040$ 2p

b) f este funcţie strict crescătoare, deci f este injectivă 2p

c) $22=f(4)\Rightarrow f(x)\le f(4)$ 1p

f este funcţie strict crescătoare, de unde $x\in(0,4)$ 2p

Problema 2.

Fie numărul a= $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

a) Verificaţi relaţia $a^3=18a+108$

b) Arătaţi că a$\in\mathbb{Q}$

SOLUŢIE:

a) verificarea relaţiei.. 3p

b) $a^3-18a-108=0 \Leftrightarrow (a-6)(a^2+6a+18)=0$ 2p

$a^2+6a+18=(a+3)^2+9>0\ \forall a\in\mathbb{R}$ 1p

$a=6$ soluţie raţională unică 1p

Problema 3.

Se consideră $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$,cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

a) Arătaţi că A= $(z_1+\overline{z_2})(z_2+\overline{z_3})(z_3+\overline{z_1})\in\mathbb{R}$

b) Dacă $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=4$,calculaţi $z_1+z_2+z_3$

c) Dacă $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$,calculaţi $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$

SOLUŢIE:

a) $A=\overline{A}\Rightarrow A\in\mathbb{R}$ 2p

b) $z_1 + z_2 + z_3 = 4$ 1p

c) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$ 1p

$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ 1p

$|z_1 + z_2 + z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ 1p

$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 2$ 1p

Problema 4

Copiii dintr-o şcoală joacă un joc. Ei sunt aranjaţi într-un cerc si numerotaţi cu 1, 2,...,n.

Începând cu poziţia 2, fiecare al doilea copil este eliminat până rămâne o singură persoană, care câştigă.

Care este locul singurului câştigător?

SOLUȚIE:

Se disting două cazuri: n=2^k si n=2^k+t , $1 \le t \le 2^k - 1$ 1p

Cazul I

Dacă n=2^k, $k \in \mathbb{N}^*$,atunci sunt eliminaţi, în această ordine, copiii de pe locurile 2, 4,6,..., 2^k 1p

3,7,11, .., 5, 9,13,...,... .... 1p

deci câştigă primul copil.. 1p

Cazul II

Daca $n = 2^k + t, 1 \le t \le 2^k - 1$,atunci sunt eliminaţi, în această ordine, copiii de pe locurile 2,4,6,... 2^k ....

(toate poziţiile pare).. 1p

Apoi pentru t impar sunt eliminaţi copiii de pe locurile 1,5,9,....șamd.

Iar pentru t par sunt eliminaţi copiii de pe locurile 3,7,11,....șamd. 1p

Va câştiga jocul copilul de pe poziţia 2t+1.. 1p