MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ 12 mai 2018

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Demonstrați că $\sqrt{x^2+8x+6\sqrt{x^2+8x-9}}<x+7,\ (\forall)x\geq 1$.

b) Rezolvați ecuația $\left[\dfrac{1}{2018-2017x}\right]=\dfrac{1}{2018-2017[x]}$, (prin $[x]$, înțelegem partea întreagă a lui x).

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{x^2+8x-9+6\sqrt{x^2+8x-9}+9}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+8x-9}+3\right)^2}=\left|\sqrt{x^2+8x-9}+3\right|$ 2p

$\left|\sqrt{x^2+8x-9}+3\right|\leq\left|\sqrt{x^2+8x-9}\right|+|3|=\sqrt{(x+9)(x-1)}+3\underbrace{<}_{\substack{ineg\ mediilor\\ x+9\neq x-1}}\dfrac{x+9+x-1}{2}+3=x+7$......................1p

b) $\left[\dfrac{1}{2018-2017x}\right]=\dfrac{1}{2018-2017[x]}=\alpha$. Obținem că $[x]=\dfrac{2018\alpha-1}{2017\alpha}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\alpha=1$..............................1p

$\alpha=1\Rightarrow[x]=1\Rightarrow x\in[1,2)$...1p

Dar $\left[\dfrac{1}{2018-2017x}\right]=1\Rightarrow 1\leq\dfrac{1}{2018-2017x}<2\Rightarrow x\in\left[1,\dfrac{4035}{4034}\right)$..1p

Obținem $x\in[1,2)\cap\left[1,\dfrac{4035}{4034}\right)=\left[1,\dfrac{4035}{4034}\right)$..1p

Problema 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$. Știind că $f(1)=2018$ și că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea: $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)=n^2f(n)$, să se determine valoarea lui $f(2018)$.

SOLUȚIE:

$(\forall)n\in\mathbb{N}^*,\ f(n+1)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)+f(n+1)-\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$..................................1p

$f(n+1)=(n+1)^2f(n+1)-n^2f(n)\Rightarrow f(n+1)=\dfrac{n}{n+2}\cdot f(n)$...2p

Se demonstrează prin inducție că $f(n)=\dfrac{2}{n(n+1)}\cdot f(1),\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*$. 3p

$f(2018)=\dfrac{2}{2019}$..1p

Problema 3.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și un punct P situat în interiorul triunghiului. Fie triunghiurile echilaterale BPQ și BCR astfel încât punctele Q și A se află în semiplane diferite față de dreapta BP, iar punctele R și A se află în semiplane diferite față de dreapta BC. Să se demonstreze că:

a) $[QR]\equiv[PC]$;

b) $AR=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}A_{ABC}}$, unde $a=BC, b=AC, c=AB$ și A_{ABC} reprezintă aria triunghiului ABC.

c) Dacă $AP+BP+CP=AR$, atunci $m(\measuredangle APB)=\dfrac{2\pi}{3}$.

SOLUȚIE:

a) $m(\measuredangle PBC)=\dfrac{\pi}{3}-m(\measuredangle CBQ), m(\measuredangle QBR)=\dfrac{\pi}{3}-m(\measuredangle CBQ)\Rightarrow \measuredangle PBC\equiv\measuredangle QBR$ 1p

$\triangle QBR\equiv\triangle PBC(LUL)\Rightarrow[QR]\equiv[PC]$ 1p

b) $AR^2=AB^2+BR^2-2AB\cdot BR\cdot\cos\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=c^2+a^2-2ac\left(\dfrac{1}{2}\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)=$

$=c^2+a^2-ac\cos B+\sqrt{3}ac\sin B$ 1p

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, ac\sin B=2A_{ABC}$ 1p

Finalizare 1p

c) $AP+BP+CP=AP+PQ+QR\Rightarrow AP+PQ+QR=AR$, deci A,P,Q,R sunt coliniare, $P\in(AQ)$. 1p

$m(\measuredangle APB)=m(\measuredangle APQ)-m(\measuredangle BPQ)=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$ 1p

Problema 4.

Într-o clasă, profesorul scrie pe tablă un număr natural nenul. Li se explică elevilor că pot șterge numărul scris pe tablă și îl pot înlocui cu un alt număr natural, chiar dacă s-a mai scris, determinat după regulile:

(*) în locul lui n scriem $3n+15$; (**) în locul lui n scriem $\sqrt{n+1}$.

a) Dacă pe tablă este scris numărul 6399, putem obține, după un număr finit de pași, numărul 2?

b) Dacă pe tablă este scris numărul 2, putem obține după un număr finit de pași, numărul 2025?

SOLUȚIE:

a) $6399\to\sqrt{6399+1}=80\to3\cdot80+15=255\to\sqrt{255+1}=16\to3\cdot16+15=63\to\sqrt{63+1}=8\to$

$\sqrt{8+1}=3\to\sqrt{3+1}=2$, deci este posibil să obținem 2 .... 3p

b) $2=4k+2$, iar $3=4k+3\neq p.p.$, deci putem aplica doar regula (*) 1p

Obținem că $3\cdot(4k+2)+15=12k+21=4k_1+1$, iar $3(4k_1+1)+15=12k_1+18=4k_2+2$. Cum

$4k_1+1+1=4k_1+2\neq p.p., 4k_2+2+1=4k_2+3\neq p.p.$ nu putem obține niciodată $2025=45^2$ folosind (**) 2p

Analizăm regula (*):

$2\to3\cdot2+15=21\to3\cdot21+15=78\to3\cdot78+15=249\to3\cdot249+15=762\to3\cdot762+15=2301>2025$. Deci, nu putem obține niciodată 2025 .... 1p