MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a XII –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Considerăm funcția $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}$.

a) Arătați că toate primitivele funcției f sunt crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Demonstrați că $f(x)+f(-x)=\cos x$, pentru orice $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Verificați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ **d)** Demonstrați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$ **e)** Calculați: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$

SOLUȚIE:

a) $F\in\int f(x)\,dx \Rightarrow F'(x)=f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}\geq 0\ (\forall)x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ 2p

b) $f(x)+f(-x)=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{e^x\cos x}{1+e^x}=\cos x$ 1p

c) Substituție $x=-t \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ 1p

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos dx=2$ 1p

și cum $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$ 1p

e) Funcție impară $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=0$ 1p

Problema 2.

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq c$ și $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $b>a$. Pe mulțimea $G_{(a;b)}=(a;b)$ considerăm legea de compoziție notată "$\circ$" și definită prin $x\circ y=(x-a)(y-a)+c$, $(\forall)x,y\in G_{(a;b)}$.

a) Arătați că "$\circ$" este asociativă dacă și numai dacă $a = c$.

b) Demonstrați că structura $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ este grup dacă și numai dacă $a = c$ și $b = +\infty$.

c) În cazul $a = c$ și $b = +\infty$, grupurile $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ le notăm $(G_a;\circ)$. Demonstrați că $(G_a;\circ)$ sunt izomorfe.

SOLUȚIE:

a) Verifică prin dublă implicație sau pe etape:
Dacă $a = c$ verifică $\Rightarrow$ $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$ 1p
Dacă $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$, obține $\Rightarrow a = c$ 1p

b) Conform cu a), structura $\left(G_{(a;b)};\circ\right)$ este asociativă $\Leftrightarrow$ $a = c$
și se obține element neutru $e = a+1$ 1p
Simetrizabilitatea obligă $x' = \dfrac{1}{x-a} + a$ 1p
$x' = \dfrac{1}{x-a} + a \in G_{(a;b)} = (a;b) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-a} + a < b$, $(\forall)x \in (a;b)$
și cum $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\left(\dfrac{1}{x-a} + a\right) = +\infty$, $b = +\infty$ 1p

c) Avem $G_a = (a;+\infty)$ $(G_a;\circ)$, cu $x\circ y = (x-a)(y-a)+a \Rightarrow x\circ y - a = (x-a)(y-a)$ și considerând funcția $f:(a;+\infty)\to(0;+\infty)$, $f(t) = t-a$, aceasta este bijectivă și $f(x\circ y) = f(x)\cdot f(y)$, deci grupurile $(G_a;\circ)$ sunt izomorfe cu $\left(\mathbb{R}_+^*;\cdot\right)$ 1p
și implicit sunt izomorfe 1p

Problema 3.
Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + X - 1$ și rădăcinile sale x_1, x_2, x_3.

a) Arătați că x_1, x_2, x_3 sunt nenule și calculați suma $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2}$.

b) Demonstrați că f are exact o singură rădăcină reală.

c) Dacă x_1 este rădăcina reală a polinomului f, arătați că $|x_2| = |x_3| < |x_1|$

SOLUȚIE:

a) Cum $f(0) \neq 0$, x_1, x_2, x_3 sunt nenule 1p
$S = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} = \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_2x_3} + \dfrac{1}{x_3x_1}\right)$ 1p
și se obține $S = -3$ 1p

b) $S = -3 < 0 \Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale 1p
Deoarece $f \in \mathbb{R}[X]$ nu are toate rădăcinile reale și $\text{grad } f = 3 \Rightarrow f$ are o singură rădăcină reală și două rădăcini complexe nereale conjugate 1p

c) Considerând x_1 rădăcina reală a polinomului f și $x_2, x_3 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ rădăcinile sale complexe nereale, ele fiind conjugate, verifică $|x_2| = |x_3|$ 1p
Se verifică $f(1)\cdot f(2) < 0$, deci $x_1 \in (1;2)$, $x_{2,3} = a \pm ib \Rightarrow x_2\cdot x_3 = a^2 + b^2$,
dar $x_2\cdot x_3 = \dfrac{1}{x_1} \in (0;1) \Rightarrow |x_2| = |x_3| < |x_1|$ 1p

Problema 4.

Pe o reprezentare topografică, graficul funcției $f:[0;\,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in[0;\,1] \\ \dfrac{1}{x^3}, & \text{dacă } x\in(1;\,2] \end{cases}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ delimitează pe un reper cartezian ortogonal xOy o suprafață de teren, *numerele reprezentând, pe hartă, sute de metri*. Urmare a unei succesiuni, suprafața de teren s-a împărțit în mod egal la doi moștenitori. Aceasta s-a realizat prin construirea unui gard interior, după o dreaptă de ecuație $x=a$, cu $a\in[0;2]$, care a impărțit suprafața în două suprafețe de arii egale.

a) Demonstrați că aria suprafeței este egală cu $\dfrac{7}{8}$ și exprimați în hectare această arie.

b) Demonstrați că $a\in(0;1)$ și determinați numărul $a\in(0;1)$ cu proprietatea enunțată.

SOLUȚIE:

a) Considerând A aria suprafeței de teren, $A=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 \dfrac{1}{x^3}\,dx=$ 1p

$=\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1-\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{7}{8}$ 2p

b) Considerând A_1 și A_2 ariile celor două suprafețe separate de gard, $A_1=A_2=\dfrac{7}{16}$ 1p

$A_1=\int_0^a f(x)\,dx$ și dacă $a\geq 1$ se obține $A_1=1-\dfrac{1}{2a^2}\geq 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{7}{16}$ 1p

$A_1=\int_0^a f(x)\,dx$, cu $a\in(0;1)$, ... 1p

$A_1=\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{7}{16}\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ 1p