MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1. O clepsidră are secțiunea axială din Figura 1. Ea se obține prin rotirea graficului funcției $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$ în jurul axei (Ox). Determinați volumul maxim al nisipului din clepsidră, astfel încât acesta să se poată scurge complet dintr-o parte în alta, atunci când clepsidra este întoarsă vertical.

BAREM DE CORECTURĂ

$$V(C_f)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2\ p}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2x)}{2}dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{3\ p}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2\ p}$$

Problema 2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5, f(x)=x^3+\hat{2}\cdot x^2+\hat{4}\cdot x+\hat{3}$.

a) Stabiliți tabla adunării, respectiv tabla înmulțirii în $\mathbb{Z}_5$.

b) Calculați $f(\hat{0}), f(\hat{1}), f(\hat{2}), f(\hat{3}), f(\hat{4})$.

c) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $p(x)=x^3+\hat{2}\cdot x^2+\hat{4}\cdot x+\hat{3}$.

d) Demonstrați că f nu este surjectivă.

BAREM DE CORECTURĂ

a)

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

Tabla adunării în $\mathbb{Z}_5$………….. **1 p**

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Tabla înmulțirii în $\mathbb{Z}_5$………. **1 p**

b) $f(\hat{0})=\hat{3};\ \ f(\hat{1})=\hat{0};\ \ f(\hat{2})=\hat{2};\ \ f(\hat{3})=\hat{0};\ \ f(\hat{4})=\hat{0}$……………………………………………….**1 p**

c) $p(x)=(x^3+x^2)+(x^2+x)+\hat{3}\cdot(x+\hat{1})=(x+\hat{1})\cdot(x^2+x+\hat{3})=(x+\hat{1})(x^2+\hat{6}\cdot x+\hat{8})=$
$=(x+\hat{1})(x+\hat{2})(x+\hat{4})$……………………………………………………………………….**2 p**

Sau. $p(x)=(x-\hat{3})(x-\hat{1})(x+\hat{1})$

d) $\operatorname{Im} f=\{\hat{0},\hat{2},\hat{3}\}\Rightarrow f$ nu ia nici una dintre valorile $\hat{1}$ sau $\hat{4}$. Așadar, avem cel puțin un element în $x\in\mathbb{Z}_5$, astfel încât $f(x)\neq\hat{1}$ și $f(x)\neq\hat{4}$.

Rezultă că f nu este surjectivă………………………………………………………………….**2 p**

<u>Sau</u>. Im f nu conține 5 elemente $\Rightarrow f$ nu este surjecție.

Problema 3. Pe mulțimea $G=(-2,2)$ definim legea de compoziție $*: G\times G\to G$, dată prin $x*y=\frac{4(x+y)}{4+xy}, (\forall)x,y\in G$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este un grup comutativ.

b) Pentru orice $t\in G$ definim funcția $f: G\to\mathbb{R}, f(t)=\int_0^t\frac{dx}{4-x^2}$. Demonstrați că f este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Demonstrează că legea $*$ este corect definită.

$(\forall), x,y\in G\Rightarrow\begin{cases}x+2>0\\y+2>0\\x-2<0\\y-2<0\end{cases}; x*y\in(-2,2)\Leftrightarrow\frac{4(x+y)}{4+xy}\in(-2,2).$

Justifică inegalitățile $\begin{cases}\frac{4(x+y)}{4+xy}>-2\\\frac{4(x+y)}{4+xy}<2\end{cases}$ ……………………………………………………………**1 p**

<u>Comutativitatea</u> este evidentă.

<u>Asociativitatea.</u>

$(x*y)*z=\frac{4(x+y+z)+xyz}{4+xy+xz+yz}=x*(y*z), (\forall)x,y,z\in G$……………………………………………**1 p**

<u>Element neutru</u>.

$x*e=\frac{4(x+e)}{4+xe}=x, (\forall)x\in(-2,2)\Rightarrow e=0.$ ……………………………………………………**0,5 p**

<u>Element simetric</u>.

$x*x'=0\Rightarrow x'=-x\in(-2,2)$ ……………………………………………………………………**0,5 p**

b) $f(t)=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)$……………………………………………………………………………**1 p**

$f(t_1)=f(t_2)\Rightarrow t_1=t_2$(<u>soluție unică</u>)$\Rightarrow f$ injectivă………………………………………………**1 p**

$f: G\to\mathbb{R}, f(t)=y\in\mathbb{R}\Rightarrow t=\frac{2\cdot e^{4y}-2}{e^{4y}+1}\in(-2,2)$…………………………………………………**1 p**

Demonstrează că $f(x*y)=f(x)+f(y), (\forall)x,y,\in(-2,2)$……………………………………………**1 p**

Problema 4. Se dă $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx, n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați I_0 și I_1.

b) Demonstrați că $I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+2}, (\forall)n\in\mathbb{N}$.

c) Demonstrați că $\lim_{n\to\infty}n\cdot I_n=\frac{1}{4}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $I_0=\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\int_0^1dx-3\cdot\int_0^1\frac{dx}{x+3}=1-3\cdot\ln(x+3)\Big|_0^1=1+3\cdot\ln\left(\frac{3}{4}\right)$……………………………**1 p**

$I_1=\int_0^1\frac{x^2}{x+3}dx=\int_0^1\frac{(x^2-9)+9}{x+3}dx=\int_0^1\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx=-\frac{5}{2}+9\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)$……………………………**1 p**

b) $I_{n+1}+3\cdot I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+3\cdot x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}$. ………………………………………**1 p**

c) Din $0\le x\le1\Rightarrow x^{n+2}\le x^{n+1}\Rightarrow I_{n+1}\le I_n, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Avem că $4I_{n+1}=I_{n+1}+3\cdot I_{n+1}\le I_{n+1}+3\cdot I_n=\frac{1}{n+2}\Rightarrow I_{n+1}\ge\frac{1}{4(n+2)}\Rightarrow[1]: I_n\le\frac{1}{4(n+1)}$………………**2 p**

Pe de altă parte avem:

$4I_n=I_n+3\cdot I_n\ge I_{n+1}+3\cdot I_n=\frac{1}{n+2}\Rightarrow[2]: I_n\ge\frac{1}{4(n+2)}$……………………………………**1 p**

Din [1] și [2], deducem că $\frac{n}{4(n+2)}\le n\cdot I_n\le\frac{n}{4(n+1)}, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Din criteriul „cleștelui”, deducem că $\lim_{n\to\infty}n\cdot I_n=\frac{1}{4}$. ………………………………………………**1 p**

<u>Notă</u>: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*