MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA NAȚIONALĂ 20 mai 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Problema 1. Un număr natural nenul n se numeşte *triunghiular* dacă există $k \in \mathbb{N}^*$astfel încât
$$n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k.$$
Determinaţi toate perechile de numere triunghiulare (m, n) cu proprietatea că $m - n = 2017$.

BAREM DE CORECTURĂ.

Dacă m, n sunt numere *triunghiulare*, atunci există numerele $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = \frac{p(p+1)}{2}$ şi $n = \frac{q(q+1)}{2}$..........**2 p**

Avem: $\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} = 2017 \Leftrightarrow (p - q)(p + q + 1) = 2 \cdot 2017$..........**2 p**

Obţinem că $(p - q, p + q + 1) \in \{(1{,}4034); (2, 2017)\}$, de unde $(p, q) \in \{(2017, 2016), (1009, 1007)\}$.....**2 p**

Perechile căutate sunt $(m, n) \in \{(2035153, 2033136), (509545, 507528)\}$..........**1 p**

Problema 2. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b$, unde a şi b sunt numere întregi. Ştiind că $f(0)$ şi $f(1)$ sunt numere impare, demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ nu are soluţii întregi.

BAREM DE CORECTURĂ.

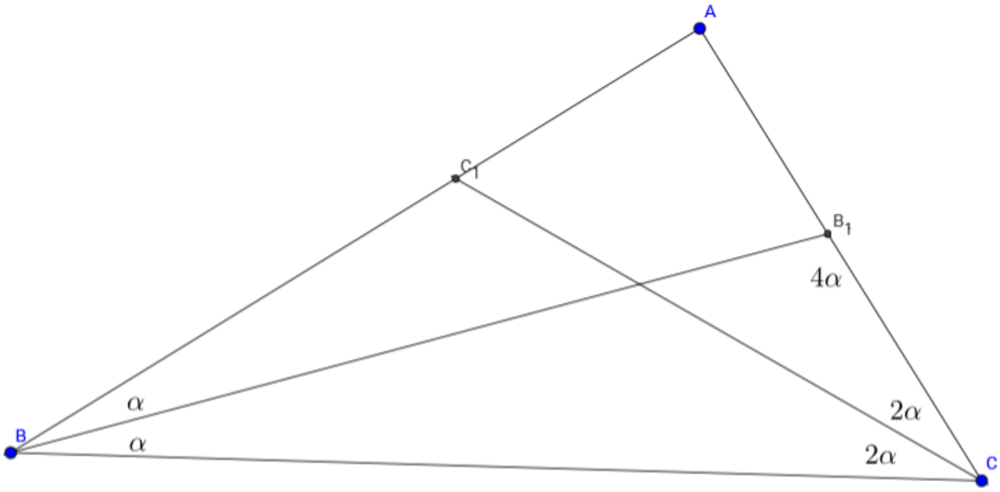
Cum $f(0)$ şi $f(1)$ sunt numere impare, rezultă că a şi b sunt numere impare. ....**3 p**

Presupunem prin reducere la absurd că ecuaţia $f(x) = 0$ ar avea măcar o soluţie întreagă, fie aceasta α; atunci $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$. .... **1 p**

Deoarece a este impar, numerele α şi $\alpha + a$ au parităţi diferite, prin urmare $\alpha^2 + \alpha a$ este număr par. Deducem că $\alpha^2 + a\alpha + b$ este număr impar, deci nenul. Presupunerea făcută este, aşadar, falsă, de unde concluzia problemei. ....**3 p**

Problema 3. În triunghiul ABC se consideră bisectoarele interioare BB_1 și CC_1. Știind că $BB_1 = BC$ și $CC_1 = BC_1$, să se determine unghiurile triunghiului.

BAREM DE CORECTURĂ.



Notăm $m(\widehat{B_1BC}) = \alpha$. Rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$......................**1 p**

$CC_1 = BC_1 \Rightarrow \Delta CC_1B$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{C_1CB}) = 2\alpha$......................**2 p**

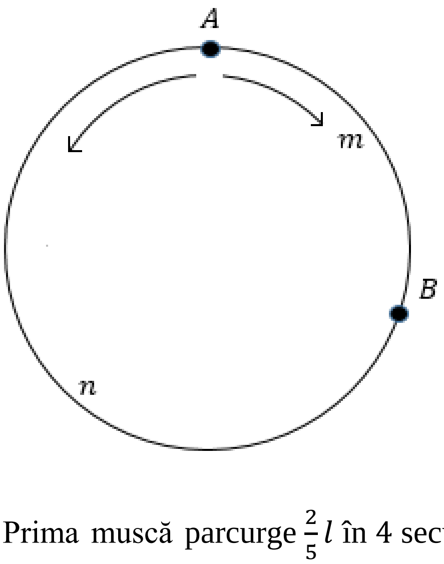
$BB_1 = BC \Rightarrow \Delta BC_1C$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BB_1C}) = m(\widehat{BCB_1}) = 4\alpha$......................**2 p**

Cum $m(\widehat{B_1BC}) + m(\widehat{BCB_1}) + m(\widehat{BB_1C}) = 180° \Rightarrow \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$......................**1 p**

Așadar, unghiurile triunghiului ABC sunt $m(\widehat{ABC}) = 40°, m(\widehat{BCA}) = 80°, m(\widehat{BAC}) = 60°$......................**1 p**

Problema 4. Două muște se mișcă uniform pe circumferința unui cerc. Ele pleacă simultan dintr-un punct A de pe circumferință în sensuri contrare. După ce se întâlnesc prima dată într-un punct B de pe circumferință, primei muște i-au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în punctul A, iar celei de-a doua, continuând mersul său, i-au mai trebuit 9 secunde ca să ajungă în punctul A. De câte ori, într-un minut, parcurg circumferința fiecare dintre cele două muște?

BAREM DE CORECTURĂ.



Fie l lungimea circumferinței cercului.

Notăm cu x lungimea arcului $\widehat{AnB}$. Rezultă că lungimea arcului $\widehat{AnB}$ este $(l - x)$......................**1 p**

Fie t timpul necesar parcurgerii distanțelor de la A la B, prima dată, același pentru cele două muște.

Dacă v_1 este viteza primei muște și v_2 viteza celei de-a doua muște avem:

$x = t \cdot v_1 = 9v_2$ și $l - x = t \cdot v_2 = 4v_1$......................**2 p**

Obținem $\frac{x}{l-x} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{9v_2}{4v_1} \Rightarrow \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$......................**1 p**

Rezultă: $\frac{x}{l-x} = \frac{3}{2}$ și, de aici $x = \frac{3l}{5}$, iar $l - x = \frac{2l}{5}$......................**1 p**

Prima muscă parcurge $\frac{2}{5}l$ în 4 secunde, deci parcurge l în 10 secunde. Așadar, parcurge circumferința de 6 ori într-un minut......................**1 p**

A doua muscă parcurge $\frac{3}{5}l$ în 9 secunde, deci parcurge l în 15 secunde.

Așadar, parcurge circumferința de 4 ori într-un minut......................**1 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*