

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI-A

1. Se consideră mulțimea \mathcal{M} formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elemente din mulțimea $\{-1, 1\}$.
- Aflați cardinalul mulțimii \mathcal{M} .
 - Dați exemplu de trei matrici $A, B, C \in \mathcal{M}$ astfel încât $\det A = 0$, $\det B = 4$, $\det C = -4$.
 - Demonstrați că $\forall T \in \mathcal{M}$, atunci $\det T \in \{-4, 0, 4\}$.
 - Argumentați că, dacă $L \in \mathcal{M}$ atunci matricea L^{2016} are toate elementele nenule.
2. a) Fie punctele laticiale (adică puncte cu ambele coordonate numere întregi) $A(1, 0); B(0, 2); C(2, 3); D(4, 2)$ și $E(3, 0)$. Calculați prin trei metode aria pentagonului $ABCDE$.
- b) Demonstrați că nu există un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticiale. (Se admite cunoscută teorema lui Pick: *Aria unui poligon \mathcal{P} ale cărui vârfuri au coordonate întregi este egală cu $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = i + \frac{f}{2} - 1$, unde i reprezintă numărul punctelor laticiale din interiorul poligonului \mathcal{P} , respectiv f este numărul punctelor laticiale de pe frontiera lui \mathcal{P})*)

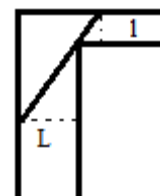
3. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} 2015x + 2016y + 2017z = \frac{1}{2}x \\ 2017x + 2015y + 2016z = \frac{1}{2}y \\ 2016x + 2017y + 2015z = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

- Indicați o soluție a sistemului.
- Demonstrați că sistemul are o unică soluție.

4. Dorel vrea să transporte o țevă de cupru de lungime Λ (grosimea poate fi presupusă neglijabilă) care trebuie trecută dintr-un culoar de lățime L într-un culoar perpendicular pe primul, de lățime l (vezi desenul alăturat). Țeava trebuie să fie paralelă cu solul, în orice moment și nu poate fi îndoită. Demonstrați că lungimea maximă a țevii pe care Dorel o poate transporta este:

$$\Lambda_{\max} = \left(\frac{2}{L^3} + \frac{2}{l^3} \right)^{\frac{3}{2}}$$



Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.