CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A -XII A

1. Să se rezolve in $\mathbb{Z}_6$ sistemul : $\begin{cases} x(y+z)=\hat{2} \\ y(x+z)=\hat{2} \\ z(x+y)=\hat{2} \end{cases}$

Soluție

Adunând ecuațiile avem: $\hat{2}(xy+yz+xz)=\hat{0} \Rightarrow xy+yz+xz \in \{\hat{0},\hat{3}\}$ 3p

Cazul I $xy+yz+zx=\hat{0} \Rightarrow xy=yz=xz=\hat{4}$ cu soluțiile:
$(\hat{2},\hat{2},\hat{2}),(\hat{5},\hat{2},\hat{2}),(\hat{2},\hat{5},\hat{2}),(\hat{2},\hat{2},\hat{5}),(\hat{4},\hat{4},\hat{4}),(\hat{1},\hat{4},\hat{4}),(\hat{4},\hat{1},\hat{4}),(\hat{4},\hat{4},\hat{1})$ 3p

Cazul II $xy+xz+yz=\hat{3} \Rightarrow xy=xz=yz=\hat{1}$ cu soluțiile $(\hat{1},\hat{1},\hat{1}),(\hat{5},\hat{5},\hat{5})$ 1p

2. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{x+3}^{2x+3} t\sqrt{t^3+9}\,dt$.

Soluţie

Funcţia $f:[x+3,2x+3]\to\mathbb{R}, f(t)=t\sqrt{t^3+9}$ este continuă 1p

Conform formulei Leibniz-Newton $\int_{x+3}^{2x+3} f(t)\,dt = F(2x+3)-F(x+3)$, unde F este o primitivă a funcţiei f 1p

Folosim regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$ 1p

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(2x+3)-F(x+3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2F'(2x+3)-F'(x+3)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(2x+3)-f(x+3)\right)=f(3)=18$
.... 4p

3. Să se determine numerele reale m, p, q şi să se rezolve ecuaţiile $x^3-3x+m=0$, $x^4+px^2+qx+2=0$, ştiind ca au o soluţie dublă comună.

Soluţie

Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+m, g(x)=x^4+px^2+qx+2$ şi α soluţia dublă comună.

Atunci $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ și $g(\alpha)=g'(\alpha)=0$ 2p

$f'(\alpha)=0$ implică $\alpha=1$ sau $\alpha=-1$ 1p

Caz I Dacă $\alpha=1$ atunci $m=2, p=-1, q=-2$ 1p

Caz II Dacă $\alpha=-1$, atunci $m=-2, p=-1, q=2$ 1p

Rezolvarea completă a unei ecuații 1p

Rezolvarea completă a celeilalte ecuații 1p

4. Să se determine $n > 0$ astfel încât aria $S(n)$ a mulţimii cuprinse între reprezentarea grafică a funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-n\right|$, axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = 1$ să fie minimă.

Soluție

f este continuă şi nenegativă deci Γ_f are arie şi

$S(n)=Aria(\Gamma_f)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left|x^2-n\right|dx$ 1p

Cazul I: Dacă $\sqrt{n}\ge 1\Rightarrow S(n)=\int_0^1(n-x^2)dx=n-\frac{1}{3}\ge\frac{2}{3}$ 2p

Cazul II: Dacă $\sqrt{n}\in[0,1)\Rightarrow S(n)=\int_0^{\sqrt{n}}(-x^2+n)dx+\int_{\sqrt{n}}^1(x^2-n)dx=\frac{4n\sqrt{n}-3n+1}{3}$ 2p

$\sqrt{n}=t, g(t)=4t^3-3t^2+1$, t≥0 îşi atinge valoarea minimă $\frac{3}{4}$ pentru $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow n=\frac{1}{4}$ 1p

Concluzia $n=\frac{1}{4}$ 1p