INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Dați exemplu de trei matrici $A, B, C \in \mathcal{M}$ astfel încât $\det A = 0, \det B = 4, \det C = -4$.

c) Demonstrați că $\forall T \in \mathcal{M},$ atunci $\det T \in \{-4, 0, 4\}$.

d) Argumentați că, dacă $L \in \mathcal{M}$ atunci matricea L^{2016} are toate elementele nenule.

Soluție.

a) $\text{card}\mathcal{M} = 2^9 = 512$ 2p

b) De exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \det A = 0$$ 1p

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \det B = 4$$ 1p

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det C = -4$$ 1p

c) Fie $T \in \mathcal{M}$. Atunci $-6 \le \det T \le 6$

Utilizând proprietățile determinanților, $4 \mid \det T \Rightarrow \det T \in \{-4, 0, 4\}$ 1p

d) Matricea L^2 va avea numai elemente impare și utilizând inducția matematică obținem că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ matricea L^n are doar elemente impare. În particular matricea L^{2016} are toate elementele numere impare, deci nenule. 1p

2. a) Fie punctele laticiale (adică puncte cu ambele coordonate numere întregi) $A(1,0); B(0,2); C(2,3); D(4,2)$ și $E(3,0)$. Calculați prin trei metode aria pentagonului $ABCDE$.

b) Demonstrați că nu există un triunghi echilateral cu toate vârfurile puncte laticiale.

(Se admite cunoscută teorema lui Pick: *Aria unui poligon* $\mathcal{P}$ *ale cărui vârfuri au coordonate întregi este egală cu* $\mathcal{A}(\mathcal{P})=i+\frac{f}{2}-1$*, unde i reprezintă numărul punctelor laticiale din interiorul poligonului* $\mathcal{P}$*, respectiv f este numărul punctelor laticiale de pe frontiera lui* $\mathcal{P}$*)*

Soluţie.

a)

Metoda 1: $\text{Aria}(ABCDE)=\text{Aria}(ABC)+\text{Aria}(ACE)+\text{Aria}(CED)=$

$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\2&3&1\end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0&1\\2&3&1\\3&0&1\end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&3&1\\3&0&1\\4&2&1\end{vmatrix}\right|=\frac{5}{2}+3+\frac{5}{2}=8$ 2p

Metoda 2: Utilizăm teorema lui Pick: $\mathcal{A}_{ABCDE}=i+\frac{f}{2}-1=6+\frac{6}{2}-1=8$ 2p

Metoda 3: Fie $O(0,0);U(0,3);V(4,3);T(4,0)$;

$\text{Aria}(ABCD)=\text{Aria}(OUVT)-\text{Aria}(OAB)-\text{Aria}(UBC)-\text{Aria}(VDC)-\text{Aria}(DTE)=$

$=4\cdot 3-\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{1\cdot 2}{2}=8$ 2p

b) Presupunem prin reducere la absurd că ar exista un astfel de triunghi.

Pe de o parte din formula lui Pick obținem că aria unui astfel de triunghi este un număr rațional.

Pe de altă parte aria unui triunghi echilateral este $\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}$, unde latura este de lungime *l*. Deoarece $l^2\in\mathbb{N}^*$, obținem că aria triunghiului $\frac{l^2\cdot\sqrt{3}}{4}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Contradicție. 1p

3. Se consideră sistemul:
$$\begin{cases}2015x+2016y+2017z=\frac{1}{2}x\\2017x+2015y+2016z=\frac{1}{2}y\\2016x+2017y+2015z=\frac{1}{2}z\end{cases}$$

a) Indicați o soluție a sistemului.

b) Demonstrați că sistemul are o unică soluție.

Soluţie.

a) Evident, avem soluția banală $(0,0,0)$ 2p

b)

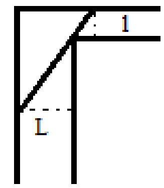
Determinantul matricei sistemului, $\det A=\begin{vmatrix}2015-\frac{1}{2}&2016&2017\\2017&2015-\frac{1}{2}&2016\\2016&2017&2015-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$ 1p

$$\det A=\left(2015+2016+2017-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2017 & 2015-\frac{1}{2} & 2016\\ 2016 & 2017 & 2015-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$ 1p

Fiecare factor al produsului este nenul 2p

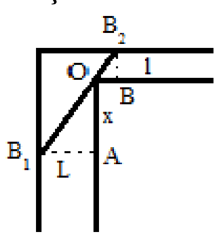
Din teorema lui Cramer rezultă că sistemul are doar soluția banală $(0,0,0)$ 1p

4. Dorel vrea să transporte o țeavă de cupru de lungime Λ (grosimea poate fi presupusă neglijabilă) care trebuie trecută dintr-un culoar de lățime L într-un culoar perpendicular pe primul, de lățime l (vezi desenul alăturat). Țeava trebuie să fie paralelă cu solul, în orice moment și nu poate fi îndoită.



Demonstrați că lungimea maximă a țevii pe care Dorel o poate transporta este $\Lambda_{\max}=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Soluție.



Fie $OA=x$. Lungimea maximă a țevii este minimul lungimii segmentului B_1B_2

$OB_1=\sqrt{L^2+x^2},\ OB_2=\dfrac{l\cdot\sqrt{L^2+x^2}}{x}$ 1p

Trebuie aflat minimul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{L^2+x^2}+\dfrac{l}{x}\sqrt{L^2+x^2}$

.... 2p

$f'(x)=\dfrac{x^3-l\cdot L^2}{x^2\cdot\sqrt{L^2+x^2}}$ 1p

$f'(x)=0\Rightarrow x_0=\sqrt[3]{l\cdot L^2}$ și este abscisa punctului de minim 1p

$\Lambda_{\max}=f\left(\sqrt[3]{l\cdot L^2}\right)=\left(L^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2p