INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Dacă z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, arătați că $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta,\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Soluţie.

Varianta I – metoda inducției matematice

Cum z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ 1p

$P(n): z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta,\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Etapa I: verificarea

$P(0): z^0+\frac{1}{z^0}=2\cos 0,$ adevărată

$P(1): z^1+\frac{1}{z^1}=2\cos\theta,$ adevărată 1p

Etapa II: demonstrația $P(1), P(k-1)$ și $P(k)\to P(k+1)$

$P(k-1): z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}=2\cos(k-1)\theta,\ P(k): z^k+\frac{1}{z^k}=2\cos k\theta,$

Arătăm că $z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=2\cos(k+1)\theta$ 1p

Din $z^k+\frac{1}{z^k}=2\cos k\theta$ și $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow \left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)=4\cos k\theta\cos\theta \Rightarrow$

$z^{k+1}+z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta \Rightarrow z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-\left(z^{k-1}+\frac{1}{z^{k-1}}\right)\Rightarrow$

$z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-2\cos(k-1)\theta$ 2p

$z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}=4\cos k\theta\cos\theta-2\cos k\theta\cos\theta-2\sin k\theta\sin\theta=2\cos k\theta\cos\theta-2\sin k\theta\sin\theta=$

$=2\cos(k+1)\theta.$ 1p

$P(0), P(1)$ adevărate, $P(1), P(k-1)$ și $P(k)\to P(k+1)\quad \forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow P(k)$ adevărată $\forall k\in\mathbb{N}$

.... 1p

Varianta a II a:

Cum z este soluție a ecuației $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \Rightarrow z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ 1p

$z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \Rightarrow z\neq 0$, ecuația devine $z^2-2z\cos\theta+1=0$.

$\Delta=4\cos^2-4=-4\sin^2\theta \Rightarrow z_{1,2}=\frac{2\cos\theta\pm 2i\sin\theta}{2} \Leftrightarrow z_{1,2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ 2p

Dacă $z=\cos\theta+i\sin\theta \Rightarrow z^n=\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n \underset{Moivre}{\Rightarrow} z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 1p

$\Rightarrow z^n+\frac{1}{z^n}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\frac{1}{\cos n\theta+i\sin n\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta+\frac{\cos n\theta-i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta}$ 1p

$=\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta=2\cos n\theta$ 1p

Similar se demonstrează pentru $z=\cos\theta-i\sin\theta$ 1p

2. Fie $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}$.

a) Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}$ este număr natural.

b) Arătați că pentru $\forall n\in\mathbb{N}, \exists p,q\in\mathbb{N}$ așa încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3}$, iar $3q^2=p^2-1$.

c) Demonstrați că $[A]$ este număr natural impar (unde $[A]$ reprezintă partea întreagă a lui A).

d) Demonstrați că $\frac{([A]-1)([A]+3)}{12}$ este pătrat perfect.

Soluție.

a) Se demonstrează folosind dezvoltarea binomului lui Newton 1p

b) Demonstrăm folosind metoda inducției matematice:

$P(n):\exists p,q\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^n=p+q\sqrt{3},\ p^2-1=3q^2$

<u>Etapa I – verificare</u>: $P(0):\left(2+\sqrt{3}\right)^0=1+0\sqrt{3},\ p=1, q=0,\ p^2-1=3q^2$ adevărat 1p

<u>Etapa II – demonstrația</u>: $P(k)\to P(k+1)$: $P(k):\exists p,q\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p+q\sqrt{3},\ p^2-1=3q^2$

Demonstrăm $P(k+1):\exists p',q'\in\mathbb{N}:\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p'+q'\sqrt{3},\ p'^2-1=3q'^2$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^k\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(p+q\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=\underbrace{(2p+3q)}_{p'}+\sqrt{3}\underbrace{(p+2q)}_{q'}=p'+q'\sqrt{3}$

Demonstrăm că $p'^2-1=3q'^2,\ p',q'\in\mathbb{N}$ 1p

c) $A=p+q\sqrt{3},\ p,q\in\mathbb{N}$ și $p^2-1=3q^2 \Rightarrow \sqrt{3q^2}=\sqrt{p-1} \Rightarrow A=p+\sqrt{p^2-1}$ 1p

$p-1\leq\sqrt{p^2-1}<p\,\Big|+p \Rightarrow 2p-1\leq p+\sqrt{p^2-1}<2p \Rightarrow \left[p+\sqrt{p^2-1}\right]=2p-1 \Rightarrow [A]=2p-1$,

$\Rightarrow [A]=2p-1$ este număr natural impar 1p

d) $[A]=2p-1,\ p\in\mathbb{N}\Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow \frac{([A]-1)\cdot([A]+3)}{12}=\frac{(2p-2)(2p+2)}{12}=\frac{2^2(p-1)(p+1)}{12}=\frac{p^2-1}{3}$

Dar $p^2-1=3q^2 \Rightarrow \frac{([A]-1)\cdot([A]+3)}{12}=q^2$ - pătrat perfect 1p

3. Rezolvați ecuația $3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0$.

Soluție.
Metoda I:
Condiții de existență a logaritmilor:
$x > 0, x \neq 1$ *și* $3x - 2 > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \setminus \{1\}$ 1p
Notăm $2^{\log_x(3x-2)} = a, a > 0$ și $3^{\log_x(3x-2)} = b, b > 0$.
Observăm că $6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 6^{\frac{1}{2}\log_x(3x-2)} = \sqrt{6^{\log_x(3x-2)}} = \sqrt{ab}$ 2p
Ecuația devine:$3a + 2b - 5\sqrt{ab} = 0, a, b > 0$.
Împărțind la $\sqrt{ab}$, ecuația devine $3\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - 5 = 0$ 1p
Folosind notația $\sqrt{\frac{a}{b}} = t, t > 0$, obținem ecuația $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0$, deci $3t^2 - 5t + 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{2}{3}$ 1p
Cum $\sqrt{\frac{a}{b}} = t$, vom avea $\frac{a}{b} = t^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = t^2$.
$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = 1$, deci $\log_x(3x-2) = 0$, dar asta conduce la $x = 1$, imposibil, din condițiile de existență 1p

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x(3x-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, deci $\log_x(3x-2) = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ și din condițiile de existență vom obține $x = 2$ 1p
Metoda a II-a:
condițiile de existență 1p
Ecuația $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$ poate fi scrisă sub forma
$3 \cdot 2^{2\log_{x^2}(3x-2)} + 2 \cdot 3^{2\log_{x^2}(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0$, deci împărțind la $6^{\log_{x^2}(3x-2)} (> 0)$ obținem ecuația $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} - 5 = 0$ 2p
Dacă $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = t$, vom avea $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0$, $3t^2 - 5t + 2 = 0$,cu soluțiile $t_1 = 1$ și $t_2 = \frac{2}{3}$
.... 2p
Pentru $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = 1$, avem $\log_{x^2}(3x-2) = 0$, aceasta conducând la $x = 1$, imposibil, din condițiile de existență 1p
Pentru $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{x^2}(3x-2)} = \frac{2}{3}$, avem $\log_{x^2}(3x-2) = 1$ și $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ și din condițiile de existență vom obține $x = 2$ 1p

4. Avem *p* penare și *c* creioane. Dacă așezăm câte un creion în fiecare penar, rămân *n* creioane afară. Dacă așezăm câte *n* creioane în fiecare penar, rămân *n* penare goale. Câte creioane și câte penare avem ?

Soluție.
Așezăm câte un creion în fiecare penar, atunci rămân *n* creioane: $p + n = c$.
Așezăm câte *n* creioane în fiecare penar, avem *n* penare goale: $n \cdot (p - n) = c$ 1p

$p + n = n \cdot (p - n) \Rightarrow p + n = np - n^2 \Rightarrow p(n-1) = n + n^2 \Rightarrow p = \frac{n(n+1)}{n-1} \in \mathbb{N}$ 1p

$c = p + n = \frac{n(n+1)}{n-1} + n = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{n-1} \Rightarrow c = \frac{2n^2}{n-1} \in \mathbb{N}$ 1p

Cum $\left.\begin{array}{l} p \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)/(n^2+n) \Rightarrow (n-1)/(2n^2+2n) \\ c \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)/2n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (n-1)/2n \\ (n-1)/(2n-2) \end{array}\right\} \Rightarrow (n-1)/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n-1\in\{1,2\}\Rightarrow n\in\{2,3\}$ 2p

Dacă $n=2\Rightarrow p=\frac{2\cdot 3}{1}=6;\quad c=\frac{2\cdot 2^2}{2-1}=8$ 1p

Dacă $n=3\Rightarrow p=\frac{3\cdot 4}{2}=6;\quad c=\frac{2\cdot 9}{2}=9$ 1p