CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin: $x_0=1, x_1=3$ şi $x_{n+2}=2\cdot x_{n+1}+3\cdot x_n, (\forall)n\geq 0.$

a) Demonstrați că $x_n=3^n, (\forall)n\in\mathbb{N}$;

b) Calculați $S=\sum_{k=0}^{2015} x_k$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c,$ cu $a\in\mathbb{R}^*, b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $5a+4b+6c=0.$

a) Pentru $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, calculați expresia $E(a,b,c)=\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)$, grupând rezultatul după a,b şi c .

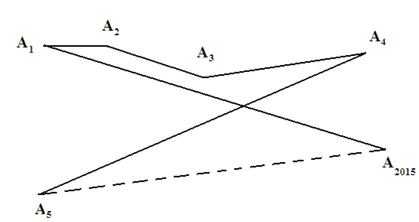
b) Demonstrați faptul că există $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ astfel încât $\alpha\cdot f(0)+\beta\cdot f(1)+\gamma\cdot f(2)=0$.

c) Justificați existența unui punct $M_0(x_0,0)$ situat pe graficul funcției f cu proprietatea că $x_0\in[0,2]$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația: $x\cdot[2+f(x)+f(-x)]+2\cdot f(-x)=0, (\forall)x\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că *f* este funcție impară.
b) Să se determine funcțiile care verifică relația de mai sus.

4. Într-un plan considerăm linia poligonală $\overline{A_1A_2A_3...A_{2015}}$, astfel încât începând cu al doilea segment, fiecare are lungimea de două ori mai mare decât a segmentului precedent. O insectă pleacă din punctul A_1, sărind succesiv în punctele A_2, A_3, A_4, …, A_{2015}. Este posibil ca după un număr finit de sărituri, insecta să se întoarcă în punctul A_1 ? $\left(\left|\overrightarrow{A_1A_{2015}}\right|=2^{2014}\cdot l; l=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\right)$



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*