INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Într-un mediu de cultură sunt, la momentul t_0 = 0, 300 bacterii. Numărul de bacterii la momentul $t > 0$ este dat de funcţia $n:[0,\infty)\to(0,\infty), n=n(t)$, funcţie care satisface relaţia $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t), (\forall)t\geq 0$.

a) Determinaţi $n(t)$.

b) Demonstraţi că pentru $t\geq 20$, numărul bacteriilor din mediu este mai mare decât 2015.

Soluţie:

a) Avem $n(t)>0, (\forall)t\geq 0$ şi $\frac{n'(t)}{n(t)}=\frac{1}{10}$ 1p

Deducem $\ln(n(t)):=\frac{1}{10}\cdot t+C$ 1p

Rezultă $n(t)=e^{\frac{t}{10}+C}, (\forall)t\geq 0$ 1p

Cu $n(0)=300 \Rightarrow e^C=300 \Rightarrow n(t)=300\cdot e^{\frac{t}{10}}, (\forall)t\geq 0$ 2p

b) Din $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t)>0 \Rightarrow n=n(t)$ este funcţie strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$ 1p

Pentru $t\geq 20$ avem $n(t)\geq n(20)=300\cdot e^2>300\cdot 2,7^2=2187>2015$ 1p

2. Se considera mulţimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{Z}_3) \mid X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\right\}$

a) Să se demonstreze că $P+Q\in G$ şi $P\cdot Q\in G, \quad \forall P,Q\in G$;

b) Să se rezolve ecuaţia $X^2=I_2, X\in G$;

c) Să se demonstreze ca produsul tuturor matricelor din G, diferite de O_2, nu depinde de ordinea lor şi să se calculeze acest produs.

Soluţie:

Daca $P=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}$ şi $Q=\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{d}\\ \hat{2}\hat{d} & \hat{c}\end{pmatrix}$, $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}\in\mathbb{Z}_3$, atunci $P+Q=\begin{pmatrix}\widehat{a+c} & \widehat{b+d}\\ \hat{2}\left(\widehat{b+d}\right) & \widehat{a+c}\end{pmatrix}\in G$ şi

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} \widehat{ac+2bd} & \widehat{bc+ad} \\ \hat{2}\left(\widehat{bc+ad}\right) & \widehat{ac+2bd} \end{pmatrix} \in G$$ 2p

Dacă $X = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix}$, atunci avem $\begin{pmatrix} \widehat{a^2+2b^2} & \widehat{2ab} \\ \widehat{ab} & \widehat{a^2+2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, de unde $\hat{a}\hat{b} = \hat{0}$ şi $\hat{a}^2 + \hat{2}\hat{b}^2 = \hat{1}$

.... 1p

Ecuația are doua soluții: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ 1p

Toate matricele din G, diferite de O_2, sunt inversabile in G 1p

Produsul nu depinde de ordinea matricelor deoarece conform a) orice doua matrice din G comuta
.... 1p

Produsul este egal cu $\hat{2}I_2$ 1p

3. Se considera polinomul: $f_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + ... + \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!} \in \mathbb{C}[X], n \in \mathbb{N}$ şi matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ cu $A^4 = O_3$.

a) Să se demonstreze că $f_n = \frac{1}{n!}(X+1)\cdot(X+2)\cdot ... \cdot(X+n)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_3 - x \cdot A) = 1, \forall x \in \mathbb{C}$,

c) Să se calculeze $\det(f_3(A))$,

Soluție:

a) Se foloseşte inducția matematica 2p

sau

se grupează din aproape în aproape

$$f_n = \underbrace{\frac{1+x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!}} + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!} =$$

$$= \underbrace{\frac{(x+1)(x+2)}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!}} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!} =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{3!} + ... + \frac{x(x+1)...(x+n-1)}{n!} = ... = \frac{1}{n!}(x+1)(x+2)...(x+n), (\forall) n \in \mathbb{N}$$

b) Deoarece I_3 comuta cu A avem: $(I_3 - x \cdot A)(I_3 + xA + x^2A^2 + x^3A^3) = I_3^4 - x^4A^4 = I_3$, de unde avem $\det(I_3 - x \cdot A) \neq 0, \forall x \in \mathbb{C}$ 1p

Deducem că funcția $g(x) = \det(I_3 - x \cdot A)$ este constantă, $\forall x \in \mathbb{C}$, deci $g(x) = g(0) = \det(I_3) = 1$ 1p

c) Avem $f_3(X) = (1+X)\left(1+\frac{1}{2}X\right)\left(1+\frac{1}{3}X\right)$ 1p

$f_3(A) = (I_3 + A)\left(I_3 + \frac{1}{2}A\right)\left(I_3 + \frac{1}{3}A\right) \Rightarrow \det(f_3(A)) = g(-1)\,g\left(-\frac{1}{2}\right)g\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$ 2p

4. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot\ln x$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=ax^2\ln x+bx^2$ să fie o primitivă a lui f.

b) Să se determine aria suprafeței cuprinsă între graficul lui f, axa (Ox) şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

c) Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to[0,\ln 2],\ f(x)=\ln(1+tgx)$. Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

<u>Soluție:</u>

a) F primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow 2ax\ln x+ax+2bx=x\ln x,\ (\forall)x\in(0,\infty)$ 2p

$\begin{cases}2a=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{1}{4}\end{cases}$ 1p

b) $\mathcal{A}=\int_1^e x\cdot\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1+e^2}{4}$ 1p

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tgx)\,dx$

Schimbăm variabila prin $x=\frac{\pi}{4}-t,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to t\in\left[\frac{\pi}{4},0\right];\ dx=-dt$

$I=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+tg\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-tgt}{1+tgt}\right]dt$ 2p

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+tgt}\right)dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2$ 1p