INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. a) Demonstrați că dacă X şi $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot Y = I_3$, atunci $Y \cdot X = I_3$.

b) Demonstrați că dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A + B = 3AB$, atunci $(3A - I_3)(3B - I_3) = I_3$ şi $A \cdot B = B \cdot A$.

Soluție:

a) Din $X \cdot Y = I_3 \Rightarrow \det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = \det(I_3) = 1$ 1p

Rezultă că $\det(X) \neq 0$ şi $\det(Y) \neq 0$, deci matricele X şi Y sunt inversabile 1p

Din $X \cdot Y = I_3 \Rightarrow Y = X^{-1} \Rightarrow Y \cdot X = X^{-1} \cdot X = I_3$ 1p

b) $(3A - I_3)(3B - I_3) = 9AB - 3A - 3B + I_3 = 3(3AB - A - B) + I_3 = I_3$ 1p

Conform cu a) avem şi: $(3B - I_3)(3A - I_3) = I_3 \Rightarrow 9BA - 3A - 3B + I_3 = I_3 \Rightarrow 3BA = A + B$ 2p

Din $\begin{cases} A + B = 3A \cdot B \\ A + B = 3B \cdot A \end{cases} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$ 1p

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcție care verifică inegalitatea $\left|\cos x - 2^x + f(x)\right| \le x^2, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că:

a) $f(0) = 0$;

b) f este continuă în punctul $x = 0$;

c) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Soluție:

a) În inegalitatea din enunț punem $x = 0$. Rezultă $\left|f(0)\right| \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$ 1p

b) $-x^2 \le \cos x - 2^x + f(x) \le x^2, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2^x - x^2 - \cos x \le f(x) \le 2^x + x^2 - \cos x$ 2p

$\lim\limits_{x \to 0}(2^x - x^2 - \cos x) = \lim\limits_{x \to 0}(2^x + x^2 - \cos x) = 0$ 1p

Rezultă $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f$ este continuă în $x = 0$ 1p

c) $\frac{2^x - x^2 - \cos x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{2^x + x^2 - \cos x}{x}, (\forall) x > 0 \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \ln 2$ 1p

$\frac{2^x - x^2 - \cos x}{x} \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{2^x + x^2 - \cos x}{x}, (\forall) x < 0 \Rightarrow (\exists) \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = \ln 2$ 1p

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot A^t = B \cdot B^t = I_3$. Să se demonstreze că cel puțin una dintre matricele $A+B$ sau $A-B$ este singulară (A^t este transpusa matricei A).

<u>Soluție:</u>

Presupunem că $A+B$ şi $A-B$ sunt nesingulare 1p

Avem $A^t = A^{-1}$ şi $B^t = B^{-1}$ 1p

Pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, avem $\det X = \det X^t$ 1p

$\det(A \cdot B) \cdot \det(A+B) = \det(A \cdot B) \cdot \det(A^t + B^t) = \det(A \cdot B) \cdot \det(A^{-1} + B^{-1}) =$

$= (\det(A)) \cdot \det(A^{-1} + B^{-1}) \cdot (\det(B)) = \det(I_3 + A \cdot B^{-1}) \cdot (\det(B)) = \det(B+A) \Rightarrow \det(AB) = 1$

.... 2p

Analog: $\det(A \cdot B) \cdot \det(A-B) = (\det(A)) \cdot \det(A^{-1} - B^{-1}) \cdot (\det(B)) =$

$= \det(I_3 - A \cdot B^{-1}) \cdot (\det(B)) = \det(B-A) = -\det(A-B) \Rightarrow \det(AB) = -1$ 1p

$\begin{cases} \det(A \cdot B) = 1 \\ \det(A \cdot B) = -1 \end{cases}$ - contradicție, rezultă cerința problemei 1p

4. Un călător parcurge dus – întors acelaşi traseu de lungime d în două zile, de fiecare dată în acelaşi interval de ora, 8^{00} – 12^{00} . În prima zi (la dus) o funcție continuă şi monotonă $f:[8,12] \to [0,d]$, exprimă distanța parcursă de călător pe traseu, iar a doua zi (la întors) o altă funcție continuă şi monotonă $g:[8,12] \to [0,d]$, exprimă distanța parcursă de călător pe traseu, în sens invers, până la fiecare moment orar $t \in [8,12]$. (în care fracțiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcția $F:[8,12] \to \mathbb{R}, F(t) = f(t) + g(t) - d$.

a) Calculați $F(8)$ şi $F(12)$.

b) Dacă $t_0 \in [8,12]$ şi $F(t_0) = 0$, demonstrați că la momentul t_0 călătorul se află în acelaşi loc pe traseu, atât la dus cât şi la întors.

c) Demonstrați că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeaşi oră atât la dus cât şi la întors.

<u>Soluție:</u>

a) $F(8) = f(8) + g(8) - d = 0 + 0 - d = -d$ 1p

$F(12) = f(12) + g(12) - d = d + d - d = d$ 1p

b) La momentul t_0 , $f(t_0) + g(t_0) - d = 0 \Rightarrow f(t_0) + g(t_0) = d$ 1p

ceea ce arată că poziția pe traseu a călătorului la momentul t_0 este aceeaşi şi la dus şi la întors

.... 2p

c) $F(8) \cdot F(12) < 0$ şi cum F este continuă 1p

există $t_1 \in [8,12]$ astfel încât $F(t_1) = 0$, deci există un punct pe traseu în care călătorul s-a aflat la aceeaşi oră atât la dus cât şi la întors 1p