INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. În planul complex, se consideră mulţimea $\mathcal{M}$ a punctelor $M(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$, care au proprietatea că $\left|\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{y-2}\right|=2$.

a) Determinaţi punctele care au ambele coordonate numere întregi şi care aparţin mulţimii $\mathcal{M}$.

b) Reprezentaţi geometric mulţimea $\mathcal{M}$ într-un sistem cartezian xOy.

Soluţie:

a) Punctul $M(x,y)$ se află în $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $x^2+y=5$ şi $y\geq 2$. ……………………….. 2p

Punctele din $\mathcal{M}$ care au ambele coordonate numere întregi sunt $M_1(-1,4), M_2(0,5), M_3(1,4)$. ……… 2p

b) Reprezentarea geometrică a mulţimii $\mathcal{M}$ este arcul din parabola $y=5-x^2$ corespunzător domeniului $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$. ……………………………………………………………….... 3p

2. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4)$.

Soluţie:

Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \log_2 x>9 \\ 4\log_x 4<1 \end{cases}$ ………………………………………………………………………… 1p

$\log_2 x>9\Rightarrow x>2^9; 4\log_x 4<1\Rightarrow x>2^8$ ……………………………………………………… 1p

Aşadar: $x>2^9$ …………………………………………………………………………………………… 1p

$\log_3(\log_2 x-9)=\log_3\left[9\cdot(1-4\log_x 4)\right]$ ………………………………………………………… 1p

$\log_2 x-9=9\left(1-\dfrac{8}{\log_2 x}\right)$ …………………………………………………………………………… 1p

Notăm $\log_2 x=y$ şi obţinem: $y^2-18y+72=0\Rightarrow\begin{cases} y_1=6 \\ y_2=12 \end{cases}$ ………………………………………… 1p

$\log_2 x=6\Rightarrow x=2^6$ - nu convine

$\log_2 x=12\Rightarrow x=2^{12}$ - soluţie …………………………………………………………………… 1p

3. Determinaţi numerele întregi m pentru care graficul funcţiei

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)\cdot 2^x+(m-6)\cdot 2^{-x}$

intersectează axa *Ox* într-un punct care are coordonatele numere raționale.

Lucian Dragomir

Soluție.

Graficul funcției intersectează axa *Ox* atunci când ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală. Ecuația revine la $(m-1)\cdot 2^{2x}+(m-6)=0$, adică $2^{2x}=\dfrac{6-m}{m-1}, m\neq 1$. Cum $2^t>0,\forall t\in\mathbb{R}$, ajungem la condiția $\dfrac{6-m}{m-1}>0\Leftrightarrow m\in(1,6)$. Numărul *m* fiind întreg, deducem că $m\in\{2,3,4,5\}$ 3p

Pentru $m=3$ obținem ecuația $2^{2x}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{2x+1}=3$. Dacă $x\in\mathbb{Q}$, atunci $2x+1=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, unde $p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0$. Atunci $2^p=3^q$, egalitate imposibilă (un număr par nu poate fi egal cu unul impar). Analog, pentru $m=4$, ecuația $2^{2x}=\dfrac{2}{3}$ nu are soluții raționale. 2p

Pentru $m=2$ obținem ecuația $2^{2x}=4$, cu soluția $x=1\in\mathbb{Q}$. Pentru $m=5$, vom obține $2^{2x}=\dfrac{1}{4}$, cu soluția $x=-1\in\mathbb{Q}$. În concluzie, dacă $m=2$ sau $m=5$, graficul funcției *f* va intersecta axa *Ox* în punctul $A(1,0)$, respectiv $A'(-1,0)$. …... 2p

4. La jocul de şah se acordă 1 punct pentru o partidă câştigată, 0,5 puncte pentru o remiză şi 0 puncte pentru înfrângere. Un şahist a jucat 100 de partide de şah şi a acumulat 40 de puncte. Care este diferenţa dintre numărul de partide pierdute şi numărul de partide câştigate ?

<u>Soluție:</u>

Fie *x*, *y* şi respectiv *z*, numărul de partide câştigate, numărul de remize şi numărul de partide pierdute de şahist 2p

Din enunț avem: $\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+0,5\cdot y=40 \end{cases}$ 2p

Rezultă $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 2x+y=80 \end{cases}$ 1p

Obținem $z-x=20$ 2p