



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ  
13 aprilie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

## CLASA A XI-A

1. Fie  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $TrA = a + d$ ,  $\det A = ad - bc$ .
  - a) Să se demonstreze că  $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b) Dacă  $\det(A - I_2) = 2$  și  $\det(A + I_2) = 4$ , calculați  $\det A$  și  $\det(A - 2I_2)$ .
  - c) Dacă  $A^{2014} = O_2$ , demonstrați că  $A^2 = O_2$ .
2. Fie  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \cdot \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$ . Să se calculeze:
  - a) Limitele laterale în punctul  $x_0 = 0$ .
  - b) Limitele laterale în punctul  $x_0 = -1$ .
  - c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
3. Un elev scrie un determinat de ordinul al treilea cu elemente numere reale astfel încât pe fiecare linie și coloană suma elementelor este 1, iar pe diagonala principală toate elementele sunt  $\frac{1}{2}$ .
  - a) Care este valoarea minimă pe care o poate lua determinantul ?
  - b) Care este determinantul de valoare minimă ?
4. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă iar ceilalți cinci au culoarea verde. Dacă se întâlnesc doi cameleoni de două culori diferite, atunci ambii își schimbă culoarea în ce-a de-a treia culoare. Altfel ei nu își schimbă culoarea. Demonstrați că:
  - a) Este posibil ca, la un moment dat, niciun cameleon să nu aibă culoarea verde.
  - b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toți cameleonii să aibă culoarea verde. (Observați că în orice moment doar numărul cameleonilor de o singură culoare este multiplu de 3).

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.