INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați că $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ şi $\forall k\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea
$a^k-b^k=(a-b)\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+...+ab^{k-2}+b^{k-1}\right)$.

b) Dacă $f\in\mathbb{Z}[X]$ să se demonstreze că pentru orice $a,b\in\mathbb{Z},a\neq b$, numărul $f(a)-f(b)$ este divizibil cu $a-b$.

c) Argumentați că nu există $g\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât:
$g(2013)=2014;\ g(2014)=2015;\ g(2015)=2013.$

d) Există un polinom $h\in\mathbb{R}[X]$ astfel încât $h(2013)=2013, h(2014)=2014$ şi $h(n)$ este irațional pentru orice n întreg diferit de 2013 şi 2014 ?

Soluție.

a) Calcul elementar 2p

b) Dacă $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$

$f(a)-f(b)=a_n\left(a^n-b^n\right)+a_{n-1}\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)+...+a_1(a-b)\,\vdots\,(a-b)$ 2p

c) Presupunem că există $g\in\mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea din enunț.

Conform celor demonstrate la punctul b) am obține $(2015-2013)\mid\left(g(2015)-g(2013)\right)\Rightarrow 2\mid -1$, fals 2p

d) Există *h* ce satisface cerința. De exemplu $h=\sqrt{2}(X-2013)(X-2014)+X$ 1p

2. Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$ şi $g(x)=e^{-x^2}$.

a) Calculați $f'(0);f''(0);f'''(0);f^{(4)}(0)$.

b) Demonstrați că $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ şi $f(x)<0,\forall x<0$.

c) Să se demonstreze că aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției *g,* axa *Ox* şi dreptele de ecuații *x* = 0 şi *x* = 1 este un număr cuprins în intervalul (0,74; 0,75).

Soluție.

a) $f'(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!},\forall x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $f''(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!},\forall x\in\mathbb{R}$

$f'''(x)=e^x-1-x, \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f^{(4)}(x)=e^x-1, \forall x\in\mathbb{R}$

.... 1p

Deducem că $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0$ 1p

b)

x	$-\infty$							0							$+\infty$
$f^{(4)}(x)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$f'''(x)$	+	$\searrow$	+	$\searrow$	+	$\searrow$	+	0	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+
$f''(x)$	-	$\nearrow$	-	$\nearrow$	-	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+
$f'(x)$	+	$\searrow$	+	$\searrow$	+	$\searrow$	+	0	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+
$f(x)$	-	$\nearrow$	-	$\nearrow$	-	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+	$\nearrow$	+

.... 3p

c) $\text{Aria}(\Gamma_g)=\int_0^1 e^{-x^2}dx$

Dar:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)\geq 0\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow e^{-x^2}\geq 1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}\right)dx=$$

$$=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}\right)\right|_0^1=0{,}7428571$$ 1p

Din

$$\left.\begin{array}{l} f(x)<0\\ \forall x\in(-\infty,0)\end{array}\right\}\Rightarrow e^x<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24};\forall x\in(-\infty,0)\Rightarrow e^{-x^2}<1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\Rightarrow$$

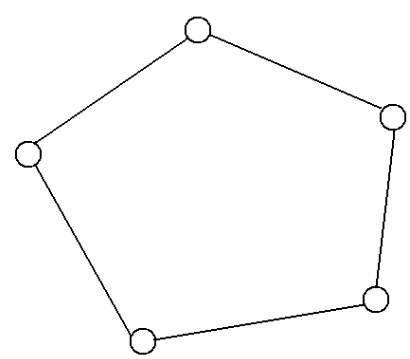
$$\Rightarrow\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\right)dx\Rightarrow\int_0^1 e^{-x^2}dx<\left.\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}\right)\right|_0^1=0{,}7474867$$

Finalizare 1p

3. Avem la dispoziție două culori roşu şi albastru. Notăm cu $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor colorărilor posibile (roşu sau albastru) a vârfurilor pentagonului alăturat. La două colorări $\mathcal{C}_1\in\mathcal{H}$ şi $\mathcal{C}_2\in\mathcal{H}$ le asociem colorarea $\mathcal{C}_3\in\mathcal{H}$ astfel:

i) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de culori diferite, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu roşu;

ii) dacă vârfurile corespunzătoare lui $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt de aceiaşi culoare, atunci în $\mathcal{C}_3$ vârful va fi colorat cu albastru;



a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{H}$;

b) Aflați elementul neutru pentru legea de compoziție descrisă pe $\mathcal{H}$.

<u>Soluție.</u>

a) Fiecare vârf al pentagonului se poate colora în roşu sau albastru.

Deducem card $\mathcal{H} = 2\times2\times2\times2\times2=32$ 3p

b) Obține că elementul neutru este colorarea în care toate vârfurile pentagonului sunt albastre

.... 4p

4. Admitem cunoscut rezultatul:

Dacă $\mathcal{P}$ este o placă omogenă care se identifică cu mulțimea $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ este o funcție continuă, atunci centrul de greutate a plăcii $\mathcal{P}$ este punctul $G(x_G,y_G)$ ale cărui coordonate sunt:

$$x_G=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};\quad y_G=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};$$

Să se afle coordonatele centrului de greutate ale plăcii omogene $\mathcal{P}$ definită prin $f:[0,\pi]\to[0,1]$, $f(x)=\sin x$, $\mathcal{P}=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le f(x)\}$

Soluție.

$$y_G=\frac{1}{2}\frac{\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx}=\frac{1}{2}\frac{\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx}{-\cos x\big|_0^\pi}=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{8}$$ 4p

Evident $x_G=\frac{\pi}{2}$ (sau prin calcul) 3p