INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. a) Demonstrați că: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x], \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

c) Dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât $2^k\le n<2^{k+1}$ demonstrați că:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n\ .$$

<u>Soluție.</u>

a) Dacă $n\in\mathbb{Z}, n\le x<n+\frac{1}{2}\Rightarrow[x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$ şi $[2x]=2n$ 1p

Dacă $n+\frac{1}{2}\le x<n+1\Rightarrow[x]=n,\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1$ şi $[2x]=2n+1$ 1p

b) Notăm $\frac{2x-1}{3}=y\Rightarrow x=\frac{3y+1}{2}$ 1p

Ecuația devine $[y]+\left[y+\frac{1}{2}\right]=\frac{15y-3}{2}\Rightarrow[2y]=\frac{15y-3}{2}=m\in\mathbb{Z}$ 1p

$y=\frac{2m+3}{15};-\frac{9}{11}<m\le\frac{6}{11}\Rightarrow m=0\Rightarrow y=\frac{1}{5}$ şi $x=\frac{4}{5}$ 1p

c) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$ 1p

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\left[\frac{n+2}{2^2}\right]=\left[\frac{n}{2^2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]$$

...

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{2k+1}}\right]$$

$S=[n]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=n$ 1p

2. Fie ΔABC şi $A'\in(BC)$. Dreapta AA' intersectează a doua oară cercul circumscris ΔABC în *D*.

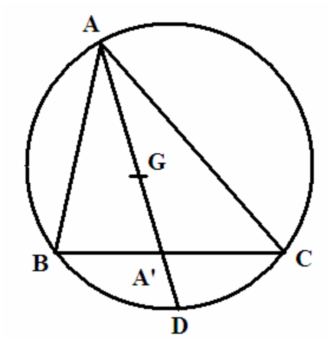
a) Demonstraţi că $AA'\cdot A'D = A'B\cdot A'C$;

b) Dacă centrul de greutate $G\in AA'$ demonstraţi că: $9AG\cdot GD = AB^2+BC^2+CA^2$;

Soluţie.

a) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ şi $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD \Rightarrow \Delta ABA' \sim \Delta CDA' \Rightarrow AA'\cdot A'D = A'B\cdot A'C$ 2p

b)



$G\in AA' \Rightarrow BA' = A'C = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow A'D = \dfrac{BC^2}{4\cdot AA'}$ 1p

$GD = GA' + A'D = \dfrac{AA'}{3} + \dfrac{BC^2}{4\cdot AA'} = \dfrac{4A'A^2+3BC^2}{12\cdot AA'}$ 2p

$9AG\cdot GD = 9\cdot\dfrac{2}{3}AA'\cdot\dfrac{4\cdot A'A^2+3BC^2}{12\cdot AA'} = \dfrac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2+3BC^2}{2} = AB^2+AC^2+BC^2$ 2p

3. La finala concursului de matematică aplicată "Adolf Haimovici", profilul ştiinţe s-au calificat 50 elevi din clasa [a] IX [a]. După corectarea lucrărilor, 19 dintre ei au obţinut punctajul maxim. S-au procedat, obişnuit la o probă de baraj pentru a desemna câştigătorul. Dar, şi la această probă toţi cei 19 elevi au obţinut punctajul maxim. Împreună cu ei am convenit următoarea regulă pentru desemnarea câştigătorului:

Elevii se aşează în cerc şi sunt numerotaţi cu 1, 2, 3, ..., 19.

Apoi, începând cu cel de pe poziţia 2, fiecare al doilea concurent este eliminat, până când rămâne câştigătorul.

a) Pe ce poziţie se află câştigătorul ?

b) Dar dacă ar fi rămas doar 16 elevi care ar fi participat la desemnarea câştigătorului, care ar fi fost poziţia acestuia ?

Soluţie.

a) Fie $E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6,E_7,E_8,E_9,E_{10},E_{11},E_{12},E_{13},E_{14},E_{15},E_{16},E_{17},E_{18},E_{19}$ cei 19 elevi.

În prima etapă sunt eliminaţi: $E_2,E_4,E_6,E_8,E_{10},E_{12},E_{14},E_{16}$ şi E_{18} 1p

Urmează: $E_1,E_5,E_9,E_{13},E_{17}$ 1p

Apoi: E_3,E_{11},E_{19} 1p

În ultima etapă este eliminat E_{15} şi câştigătorul este E_7 .... 1p

b) Fie $E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6,E_7,E_8,E_9,E_{10},E_{11},E_{12},E_{13},E_{14},E_{15},E_{16}$ cei 16 elevi.

În prima etapă sunt eliminaţi: $E_2,E_4,E_6,E_8,E_{10},E_{12},E_{14},E_{16}$.

Apoi: E_3,E_7,E_{11},E_{15} 1p

Urmează: E_5,E_{13} 1p

În ultima etapă este eliminat E_9 şi câştigătorul este E_1 .... 1p

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ astfel încât

$f(n+1) = f(n) + \dfrac{1}{n^2+3n+2}, (\forall) n\in\mathbb{N}$ şi $f(2014) = \dfrac{2014}{2015}$.

a) Să se demonstreze că $f(n+1)=f(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

b) Determinați funcția *f*.

Soluție.

a) $\frac{1}{n^2+3n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, de unde rezultă cerința 2p

b) $f(n+1)=f(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

Dăm lui n valorile: 0, 1 , 2, ..., n – 1 şi obținem:

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+1-\frac{1}{2} \\ f(2)=f(1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\ f(3)=f(2)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\ \text{................................} \\ f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \end{cases}$$ 2p

Adunând aceste egalități, membru cu membru, obținem:

$f(n)=f(0)+\frac{n}{n+1},\quad (\forall)n\in\mathbb{N}$ 1p

$n=2014\Rightarrow f(2014)=f(0)+\frac{2014}{2015}\Rightarrow f(0)=0$ 1p

Aşadar $f(n)=\frac{n}{n+1},\quad (\forall)n\in\mathbb{N}$ 1p