INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

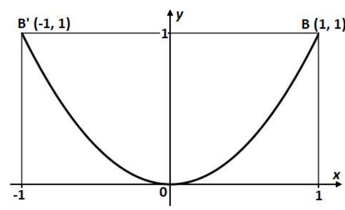
ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Cătălin oferă prietenei sale, de 8 Martie, o broşă de aur în formă de parabolă, ca în figura alăturată.
Calculați lungimea acestei broşe.



Notă: Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungimea egală cu $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{a+bi \mid a\in(-1;1), b\in(0,1], a^2+b^2=1\right\}$.

a) Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in A$, există un unic $z\in A$ cu proprietatea că $z^2 = x\cdot y$.

b) Pe mulțimea A definim operația "*" prin $x * y = z$, unde z este unicul număr determinat la punctul anterior. Demonstrați că legea "*" este comutativă, dar nu este asociativă.

3. a) Calculați $\int_0^\pi x\cdot \sin x\,dx$.

b) Demonstrați că există $t\in(0,1)$ astfel încât $\int_0^\pi x^t\cdot \sin x\,dx=\sqrt[10]{2013}$.

4. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea polinoamelor care au toți coeficienții din mulțimea {-1, 1} şi toate rădăcinile reale.

a) Polinomul $x^3 + x^2 + x + 1$ este din $\mathcal{P}$?

b) Dacă $f \in \mathcal{P}$, grad $f \geq 2$ şi are rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$, demonstrați că $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=3$.

c) Arătați că orice polinom din mulțimea $\mathcal{P}$ are gradul mai mic sau egal cu 3.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*