



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X-A

- În raport cu un reper cartezian xOy , considerăm un purice P care sare doar în puncte având ambele coordonate întregi. La o săritură, puricele se deplasează doar pe verticală sau pe orizontală. După o săritură nu este obligatoriu să schimbe direcția de deplasare, dar respectă următoarea regulă: sare 3 unități, apoi 2 unități, 3 unități, 2 unități etc. De exemplu, dacă M se află inițial în punctul $(1,2)$, la prima mutare ar putea fi în punctul $(1,5)$, iar apoi în $(1,7)$ dacă păstrează direcția, sau în $(3,5)$, dacă își schimbă direcția.
a) Dacă P se află inițial în origine, demonstrați că poate ajunge în punctul $(2013, 0)$.
b) Dacă P se află inițial în origine, demonstrați că poate ajunge în orice punct cu ambele coordonate întregi din plan.
- Se consideră numerele complexe u, v și z astfel încât $|u| = |v| = 1$ și $|u + v| = \sqrt{3}$.
Să se demonstreze că:
a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2, (\forall) z \in \mathbb{C}$.
b) $u \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot v = 1$.
c) $|u - v| = 1$.
- a) Demonstrați că $\frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^6 x; \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
b) Determinați toate numerele naturale m pentru care $\frac{\sin^m x - \operatorname{tg}^m x}{\cos^m x - \operatorname{ctg}^m x} = \operatorname{tg}^{3m} x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- Karina aruncă de 2012 ori o monedă, iar Andrada aruncă de 2013 ori o monedă. Care este probabilitatea ca Andrada să obțină stema de mai multe ori decât Karina?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.