INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

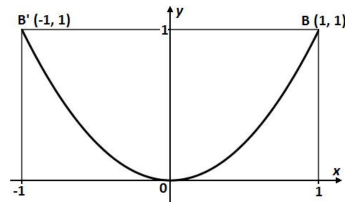
ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Cătălin oferă prietenei sale, de 8 Martie, o broşă de aur în formă de parabolă, ca în figura alăturată.
Calculaţi lungimea acestei broşe.



Notă: Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci graficul lui f are lungimea egală cu $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Soluţie:

Graficul având forma de parabolă, funcţia căutată este de tipul $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ 1p

Din condiţiile $f(-1)=f(1)=1$, $f(0)=0 \Rightarrow a=1$, $b=c=0$ 1p

Avem $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$; $f(x)=x^2$, $\forall x\in[-1,1]$.

Lungime broşă: $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=4\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\,dx$ 1p

$\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\right)+C$ 3p

Finalizare $L=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ 1p

2. Se consideră mulţimea $A=\left\{a+bi \mid a\in(-1;1), b\in(0,1], a^2+b^2=1\right\}$.

a) Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y\in A$, există un unic $z\in A$ cu proprietatea că $z^2=x\cdot y$.

b) Pe mulţimea A definim operaţia "*" prin $x * y = z$, unde z este unicul număr determinat la punctul anterior. Demonstraţi că legea "*" este comutativă, dar nu este asociativă.

Mihai Monea şi Steluţa Monea

Soluţie:

a) Observăm că $A=\left\{\cos\alpha+i\sin\alpha \mid \alpha\in(0,\pi)\right\}$. Dacă $x=\cos u+i\sin u$, $y=\cos v+i\sin v$ sunt din A, se arată că $z=\cos\frac{u+v}{2}+i\sin\frac{u+v}{2}$ este unicul element din A cu proprietatea că $z^2=x\cdot y$ 3p

b) Justificarea comutativităţii 2p

Un contraexemplu pentru asociativitate 2p

3. a) Calculați $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx$.

b) Demonstrați că există $t \in (0,1)$ astfel încât $\int_0^{\pi} x^t \cdot \sin x dx = \sqrt[10]{2013}$.

Soluție:

a) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = \int_0^{\pi} x \cdot (-\cos x)' dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$ 2p

b) Fie $f(t) = \int_0^{\pi} x^t \cdot \sin x dx$; $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$

$f(1) = \pi$; $f(0) = 2$ 1p

$2 < \sqrt[10]{2013} < 3 < \pi$ 1p

f continuă 1p

Proprietatea lui Darboux pentru f asigură că $\exists\, t \in (0, 1)$ astfel încât $f(t) = \sqrt[10]{2013}$ 2p

4. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea polinoamelor care au toți coeficienții din mulțimea {-1, 1} şi toate rădăcinile reale.

a) Polinomul $x^3 + x^2 + x + 1$ este din $\mathcal{P}$?

b) Dacă $f \in \mathcal{P}$, grad $f \geq 2$ şi are rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n$, demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3$.

c) Arătați că orice polinom din mulțimea $\mathcal{P}$ are gradul mai mic sau egal cu 3.

Soluție.

a) $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x + i)(x - i)$, cu rădăcinile -1, i, -i. Aşadar $x^3 + x^2 + x + 1 \notin \mathcal{P}$ 2p

b) $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n) = s_1^2 - 2s_2$ 1p

Dar $s_1 \in \{-1, 1\}$, $s_2 \in \{-1, 1\}$ şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3$ 1p

c) Din inegalitatea mediilor $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \geq \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + ... + \dfrac{1}{x_n^2}} \Rightarrow$

$\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + ... + \dfrac{1}{x_n^2}\right) \geq n^2; \left(x_i \in \mathbb{R}^*; \forall i = \overline{1,n}\right)$ 1p

Dacă, prin absurd, ar exista un polinom din $\mathcal{P}$ cu gradul $n \geq 4$ şi rădăcinile $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + ... + \frac{1}{x_n^2} \geq \frac{n^2}{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \frac{n^2}{3} \geq \frac{16}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + ... + \frac{1}{x_{n-1}x_n}\right) \geq \frac{16}{3}$$, contradicție

deoarece $\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right)^2 = \left(\dfrac{s_{n-1}}{s_n}\right)^2 = 1$ şi $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + ... + \dfrac{1}{x_{n-1}x_n} = \dfrac{s_{n-2}}{s_n} \in \{-1;1\}$ 2p