INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. În raport cu un reper cartezian xOy, considerăm un purice P care sare doar în puncte având ambele coordonate întregi. La o săritură, puricele se deplasează doar pe verticală sau pe orizontală. După o săritură nu este obligatoriu să schimbe direcţia de deplasare, dar respectă următoarea regulă: sare 3 unităţi, apoi 2 unităţi, 3 unităţi, 2 unităţi etc. De exemplu, dacă M se află iniţial în punctul (1,2), la prima mutare ar putea fi în punctul (1,5), iar apoi în (1,7) dacă păstrează direcţia, sau în (3,5), dacă îşi schimbă direcţia.
a) Dacă P se află iniţial în origine, demonstraţi că poate ajunge în punctul (2013, 0).
b) Dacă P se află iniţial în origine, demonstraţi că poate ajunge în orice punct cu ambele coordonate întregi din plan.

Mihai Monea şi Steluţa Monea

<u>Soluţie.</u>
a) Puricele se poate deplasa doar orizontal, astfel: după două sărituri ajunge în punctul (5,0), după patru ajunge în (10,0) şi, tot aşa, după 804 sărituri ajunge în (2010,0). La următoarea săritură va ajunge în (2013,0). 3p
b) Este suficient să demonstrăm că, dintr-un punct, poate ajunge în punctele vecine. 1p
Avem drumurile: (0,0) – (3,0) – (1,0), (0,0) – (–3,0) – (–1,0), (0,0) – (0,3) – (0,1) şi (0,0) – (0,–3) – (0,–1), care demonstrează că se poate ajunge pe punctele vecine originii şi, de aici, concluzia 3p

2. Se consideră numerele complexe u, v şi z astfel încât $|u| = |v| = 1$ şi $|u + v| = \sqrt{3}$.
Să se demonstreze că:
a) $z\cdot\overline{z}=|z|^2, (\forall) z\in\mathbb{C}$.
b) $u\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot v=1$.
c) $|u-v|=1$.

<u>Soluţie.</u>
a) Dacă $z = x + i\cdot y$, $x,y\in\mathbb{R}$, atunci $\overline{z}=x-i\cdot y$ şi $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$ 1p
b) $|u+v|^2=3\Leftrightarrow(u+v)(\overline{u}+\overline{v})=3\Leftrightarrow u\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot v=1$ 3p
c) $|u-v|^2=(u-v)(\overline{u}-\overline{v})=u\cdot\overline{u}+v\cdot\overline{v}-(u\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot v)=1\Leftrightarrow|u-v|=1$ 3p

3. a) Demonstraţi că $\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x-\mathrm{ctg}^2 x}=\mathrm{tg}^6 x; \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Determinaţi toate numerele naturale m pentru care $\dfrac{\sin^m x-\mathrm{tg}^m x}{\cos^m x-\mathrm{ctg}^m x}=\mathrm{tg}^{3m} x$, $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Soluție.
a) Demonstrează egalitatea 2p

b) În particular, relația din enunț are loc şi pentru $x=\frac{\pi}{3}$. Înlocuind şi efectuând calculele, obținem că $\left(\left(\sqrt{3}\right)^m-1\right)\left(2^m-\left(\sqrt{3}\right)^m-1\right)=0$. Întrucât $m\neq 0$ (altfel s-ar anula numitorul fracției din enunț), prima paranteză este nenulă. Rămâne că se anulează a doua paranteză. 3p

Găsim ecuația exponențială $\left(\frac{1}{2}\right)^m+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m=1$. Cum $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(m)=\left(\frac{1}{2}\right)^m+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m$ este o funcție strict descrescătoare, fiind suma a două funcții exponențiale de baze subunitare, f va fi injectivă. Întrucât f(m) = f(2) = 1, rezultă că singura soluție a ecuației este m = 2. .... 2p

4. Karina aruncă de 2012 ori o monedă, iar Andrada aruncă de 2013 ori o monedă. Care este probabilitatea ca Andrada să obțină stema de mai multe ori decât Karina?

Soluție.
Notăm cu p probabilitatea ca, după cele 2012 aruncări ale Karinei şi primele 2012 aruncări ale Andradei, cele două fete să aibă acelaşi număr de apariții ale stemei. În acel moment, probabilitatea ca Andrada să aibă mai multe apariții ale stemei este egală cu probabilitatea de a avea mai puține apariții ale stemei, ambele evenimente având probabilitatea $\frac{1-p}{2}$. 2p

După cea de-a 2013 aruncare, Andrada obține stema de mai multe ori decât Karina dacă: i) în primele 2012 aruncări a obținut de mai multe ori stema, indiferent de rezultatul ultimei aruncări sau ii) în primele 2012 aruncări fetele au obținut de acelaşi număr de ori stema, iar la ultima aruncare Andrada obține stema. 3p

Astfel, probabilitatea dorită este $\frac{1-p}{2}+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$. 2p