INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Salariul mediu anual S(n) (exprimat în lei) al unui angajat al unei firme, funcţie de numărul n de produse realizate, $n \in \{100, 101, 102, ..., 2000\}$, se calculează după formula $S(n) = \frac{a \cdot n}{b - n}$, unde a şi b sunt numere naturale, cel puţin egale cu 2013, stabilite în raport cu aptitudinile şi rezultatele anterioare ale angajatului.

a) În cazul unui angajat pentru care a = 36000 şi b = 5000, calculați salariul maxim la care poate ajunge angajatul respectiv.

b) Considerăm doi angajați care pot primi acelaşi salariu maxim. Ştiind că $a_1 = 2a_2$, arătați că $b_1 = 2b_2 - 2000$.

Lucian Dragomir

Soluție

a) Funcția $S:\{100,101,102,...,2000\} \to \mathbb{R}$, $S(n) = \frac{a \cdot n}{b - n}$ este strict crescătoare:

$n < m \Rightarrow a \cdot n < a \cdot m$ şi $b - n > b - m \Rightarrow S(n) < S(m)$ (ținem seama şi de faptul că $b > 2000$) 3p

Salariul maxim pe care îl poate primi angajatul este $S(2000) = \frac{36000 \cdot 2000}{5000 - 2000} = 24000$ lei 2p

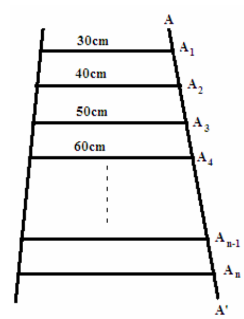
b) Din $\frac{2000 \cdot a_1}{b_1 - 2000} = \frac{2000 \cdot a_2}{b_2 - 2000}$, cerința se obține imediat 2p

2. Dorim să construim o scară având formă trapezoidală cu dimensiunile treptelor din figura alăturată. Se ştie că $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = 20$ cm, $AA_1 = A_nA' = 10$ cm şi AA' = 3,4 m.

a) Stabiliți câte trepte are scara.

b) Stabiliți care este numărul minim de scânduri cu lungimea de 3,5 m ce trebuie cumpărate pentru a putea construi scara.

c) Care este lungimea totală a materialului nefolosit şi care este procentul pierderii ?



Soluție.

a) Fie n numărul de trepte. Între două trepte consecutive avem un segment $[A_iA_{i+1}]$ de lungime 20cm. $AA' = AA_1 + 20(n-1) + A_nA' \Rightarrow 340 = 10 + 20(n-1) + 10 \Rightarrow n = 17$ 2p

b) În primul rând avem nevoie de două scânduri pentru marginile scării 1p

Treptele $T_1, T_2, ..., T_{17}$ au lungimile de 30, 40, 50, ..., 190 cm.

Lungimea treptei T_i este $(20 + 10 \cdot i)$ cm, $i = \overline{1,17}$.

Lungimea totală a materialului necesar pentru a construi treptele va fi de:

$$\sum_{i=1}^{17}(20+10 \cdot i) = 20 \cdot 17 + 10 \cdot \frac{17 \cdot 18}{2} = 1870 \text{ cm}$$ 1p

Cum $1870 = 350 \cdot 5 + 120$, rezultă că sunt necesare cel puțin încă 6 scânduri 1p

Arată că există cel puțin o combinație astfel încât din cele 6 scânduri se pot construi treptele.

De exemplu: $T_{17} + T_{14} \to 3{,}5$m, $T_{16} + T_{15} \to 3{,}5$m, $T_{13} + T_{12} + T_4 \to 3{,}5$m, $T_{11} + T_{10} + T_8 \to 3{,}5$m, $T_9 + T_7 + T_6 + T_5 \to 3{,}5$m, $T_1 + T_2 + T_3 \to 1{,}2$m 1p
În total avem nevoie de 8 scânduri.

c) Avem $8 \cdot 3{,}5 = 28$ m, lungimea totală a scândurilor. S-au pierdut $2 \cdot 0{,}1$ m $= 0{,}2$ m (din margini) şi încă 2,3 m. Nu s-au folosit 2,5 m de scândură. Procentul pierderii este $\frac{250}{28}\% \simeq 8{,}93\%$ 1p

3. a) Dacă *M* este punct interior triunghiului ABC, demonstraţi că AM + BM < AC + BC.

b) Dacă $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ şi $\alpha + \beta < \pi$, demonstraţi că $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(x+y)} < \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin x + \sin y}$.

__Soluţie.__

a) Fie $AM \cap BC = \{P\}$. În ΔBMP avem $BM < BP + PM$, iar în ΔAPC avem că $AP < PC + AC$. Adunând cele două inegalităţi, obţinem concluzia 3p

b) În ΔABC, notăm m(A) = α şi m(B) = β; atunci $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi - C) = \sin C$. Analog, în ΔABM notăm m(MAB) = x şi m(MBA) = y; atunci $\sin(x+y) = \sin(\pi - M) = \sin M$ 1p

În ΔABC avem că $A_{\Delta ABC} = \frac{ac\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$, de unde $c\sin B = b\sin C$; la fel se obţine că $c\sin A = a\sin C$. Prin adunare, deducem că $AB(\sin\alpha + \sin\beta) = (AC + BC)\sin(\alpha+\beta)$ şi, analog, $AB(\sin x + \sin y) = (AM + BM)\sin(x+y)$. Folosind punctul a), obţinem inegalitatea ce trebuia demonstrată 3p

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $T \in (MN)$ şi $D, P \in (BC)$.

Dacă (AD) este bisectoarea unghiului A şi $\frac{NC}{MB} = \frac{PC}{PB} = \frac{TN}{TM}$, demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, în notaţiile obişnuite (BC = a, AB = c, AC = b).

b) AD este paralelă cu TP.

Sergiu Prisacariu

__Soluţie.__

a) Se foloseşte teorema bisectoarei şi formula vectorului de poziţie al punctului ce împarte un segment într-un raport dat 3p

b) Notăm $\frac{NC}{MB} = \frac{PC}{PB} = \frac{TN}{TM} = k$ şi NC = x; atunci $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{PB} = \frac{-1}{k+1}\overrightarrow{BC}$ 1p

Din $\frac{NC}{NA} = \frac{x}{b-x}$ rezultă că $\overrightarrow{PN} = \frac{b-x}{b}\overrightarrow{PC} + \frac{x}{b}\overrightarrow{PA}$. Din $\frac{MB}{MA} = \frac{x}{ck-x}$ obţinem că $\overrightarrow{PM} = \frac{ck-x}{ck}\overrightarrow{PB} + \frac{x}{ck}\overrightarrow{PA}$. Cum $\frac{TN}{TM} = k$, avem $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{PN} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{PM}$. Înlocuind, deducem că $\overrightarrow{TP} = \frac{x-b}{b(k+1)}\overrightarrow{PC} + \frac{x-ck}{c(k+1)}\overrightarrow{PB} + \frac{x(b+c)}{bc(k+1)}\overrightarrow{AP}$ 2p

După calcule, $\overrightarrow{TP} = \frac{x}{bc(k+1)}\left(c\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AB}\right) = \frac{x(b+c)}{bc(k+1)}\overrightarrow{AD}$, deci $AD \parallel PT$ 1p