

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a X-a

1. Un grup de patru tineri se numește *frumos* dacă din grup face parte cel puțin o fată. Stabiliți câte grupuri *frumoase* se pot forma din echipa de dans sportiv a unui liceu, alcătuită din Alina, Bogdan, Cristina, Daniel, Elena, Florin, Gabriela și Horațiu.
2. În plan, considerăm mulțimea \mathcal{P} a tuturor punctelor cu ambele coordonate întregi, precum și mulțimea \mathcal{D} a tuturor dreptelor care trec prin cel puțin două puncte din \mathcal{P} .
 - a) Demonstrați că prima bisectoare (dreapta de ecuație $y = x$) aparține mulțimii \mathcal{D} .
 - b) Demonstrați că orice dreaptă din mulțimea \mathcal{D} conține cel puțin 3 puncte din mulțimea \mathcal{P} .
 - c) Demonstrați că nu există nicio dreaptă oblică d în mulțimea \mathcal{D} astfel încât $A(1, \sqrt{2012}) \in d$.
3. Smaranda alege atent un număr natural a , apoi Nicu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x . Dacă unul dintre numerele $A = 10 - \log_2(x^2)$ sau $B = \log_2(16x)$ este cel puțin egal cu a , atunci Nicu îi va face Smarandei un cadou în valoare de 3^a lei.
Ce număr trebuie să aleagă Smaranda pentru a fi sigură că va primi un cadou cât mai valoros?
4. Fie $u = 2012^{3n}$ și $v = 2012^{2n} \cdot 2011^n + 2012^n \cdot 2011^{2n} + 2 \cdot 2011^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Demonstrați că există valori ale lui n pentru care $u < v$.
 - b) Demonstrați că există valori ale lui n pentru care $u > v$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.