CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a XII-a

1. Fie mulţimea $\mathcal{A}$ = {LEU, TIGRU, URS, LUP, IEPURE}. Pe $\mathcal{A}$ definim o lege de compoziţie asociativă, notată ♥, descrisă mai jos:

♥	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE
LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU
TIGRU	URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU
URS	LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS
LUP	IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP
IEPURE	LEU	TIGRU	URS	LUP	IEPURE

a) Câte legi de compoziţie comutative se pot defini pe $\mathcal{A}$? Se află ♥ printre aceste legi?

b) Legea de compoziţie ♥ are element neutru?

c) Calculaţi $\text{LEU}^{2012} = \underbrace{\text{LEU}\heartsuit\text{LEU}\heartsuit\ldots\heartsuit\text{LEU}}_{2012}$.

d) Rezolvaţi ecuaţia $\text{LEU}\heartsuit\, x\, \heartsuit\text{TIGRU} = \text{IEPURE}$, unde necunoscuta este $x \in \mathcal{A}$.

Soluţie:

a) Se pot defini 5^{15} legi comutative 1p

Legea ♥ este comutativă, deoarece tabla operaţiei este simetrică faţă de diagonala principală …. 1p

b) IEPURE este elementul neutru pentru legea ♥ (în tabla operaţiei, linia şi coloana acestui element coincid cu linia, respectiv coloana de bordare 1p

c) Se observă că LEU^5 = IEPURE (element neutru) 1p

$\text{LEU}^{2012} = \text{LEU}^2 = \text{LEU}\heartsuit\text{LEU} = \text{TIGRU}$ 1p

d) Compunem la stânga cu LUP şi la dreapta cu URS; obţinem unica soluţie x = TIGRU 2p

2. Calculaţi $\int_0^2 \max\left\{\ln\left(1+x^2\right);1\right\}dx$.

Soluţie:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2) - 1$. Deoarece $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \ge 0, \forall x \in [0,\infty)$, rezultă că f este funcţie crescătoare pe $[0, \infty)$ 1p

Deoarece $f(0) = -1$ şi $f\left(\sqrt{e-1}\right) = 0$, deducem că

$$\max\left\{\ln\left(1+x^2\right),1\right\} = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in \left[0,\sqrt{e-1}\right] \\ \ln\left(1+x^2\right), \text{ pentru } x \in \left[\sqrt{e-1},2\right] \end{cases}$$ 2p

$\int_0^2 \max\left\{\ln\left(1+x^2\right),1\right\}dx = \int_0^{\sqrt{e-1}} 1dx + \int_{\sqrt{e-1}}^2 \ln\left(1+x^2\right)dx =$ 1p

$= 2\ln 5 - 4 + 2\text{arctg}2 + 2\sqrt{e-1} - 2\text{arctg}\sqrt{e-1}$ 3p

3. Se consideră funcţiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=1+x^{n^2-1}+x^{n^2+2n}$, unde $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Notăm cu σ_n aria subgraficului funcţiei f_n.

a) Demonstraţi că $\sqrt{\sigma_n}=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}, \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

b) Demonstraţi că $2012,2012<\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}+...+\sqrt{\sigma_{2013}}<2013$.

Soluţie:

a) $\sigma_n=\int_0^1\left(1+x^{n^2-1}+x^{n^2+2n}\right)dx=\left(x+\dfrac{x^{n^2}}{n^2}+\dfrac{x^{n^2+2n+1}}{n^2+2n+1}\right)\Bigg|_0^1$ 1p

$=1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{\left(n^2+n+1\right)^2}{n^2(n+1)^2}$ 1p

$\sqrt{\sigma_n}=\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$ 1p

b) $\sqrt{\sigma_n}=1+\dfrac{1}{n^2+n}=1+\dfrac{1}{n(n+1)}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ 2p

$\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}+...+\sqrt{\sigma_{2013}}=2013-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2014}<2013$ 1p

$\sqrt{\sigma_2}+\sqrt{\sigma_3}+...+\sqrt{\sigma_{2013}}=2013-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2014}>2012,2012$ 1p

4. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi polinomul $f=X^n-2nX^{n-1}+\left(2n^2-4\right)X^{n-2}+a_3X^{n-3}+...+a_n\in\mathbb{C}[X]$, având rădăcinile complexe $x_1,x_2,...,x_n$.

a) Calculaţi $\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2-n\cdot\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$.

b) Demonstraţi că f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă n = 2.

Soluţie:

a) Folosind primele două relaţii Vieté, obţinem că:

$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2-n\cdot\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)=4n^2-n\left[4n^2-2\left(2n^2-4\right)\right]=4n^2-8n$ 3p

b) Dacă toate rădăcinile sunt reale, folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că $\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2-n\cdot\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\leq 0$. Ţinând seama de punctul a), deducem că $n\leq 2$, prin urmare n = 2 .... 2p

Reciproc, dacă n = 2, atunci $f=X^2-4X+4$, polinom care are ambele rădăcini reale. 2p

<u>**Notă:**</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.