CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Profil real, specializarea ştiinţele naturii

Clasa a XI a

1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei d care este asimptotă oblică la graficul funcţiei f.
b) Argumentaţi că funcţia f este convexă.
c) Demonstraţi că aria suprafeţei cuprinsă între dreapta d, graficul funcţiei f, dreptele x = 1 şi x = 2 este mai mică decât $\dfrac{5}{12}$.

Soluţie:
a) d: y = x – 1 .... 2p
b) $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} > 0,\ \forall x \in [0,\infty) \Rightarrow$ f este convexă 2p

c) Dreapta x = 1 intersectează pe d în A(1, 0) şi graficul lui f în $B\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$. Dreapta x = 2 intersectează graficul lui f în $C\left(2, \dfrac{4}{3}\right)$ şi dreapta d în punctul D(2, 1) 1p

Aria cerută este mai mică decât $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{5}{12}$ 2p

2. a) Demonstraţi că ecuaţia $x^5 - x = m$ are cel mult trei soluţii reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

b) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c = d^5 - d$. Demonstraţi că determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ este nul.

Soluţie:
a) Demonstrarea cerinţei 3p
b) Conform a), există două numere egale printre cele patru numere date 2p
Atunci determinantul dat are (măcar) două coloane egale, deci este nul 2p

3. Pentru fiecare număr natural n se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ n & 1 & n \\ n & n & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că nu există niciun număr natural n pentru care matricea A(n) să aibă rangul 2.
b) Se numeşte *pas* următoarea modificare a elementelor unei matrice de tipul A(n): fiecare element de pe diagonala principală se măreşte sau se micşorează cu 2, iar toate celelalte şase elemente se măresc sau se micşorează cu 1. Stabiliţi dacă este posibil ca, plecând de la A(2), după 2012 astfel de *paşi*, determinantul matricei obţinute să fie egal cu 2012.

Soluţie:

a) $\det A(n) = (2n+1)(1-n)^2$ 1p

O condiţie necesară (nu şi suficientă) pentru ca rangul matricei să fie egal cu 2 este det A(n) = 0; cum n este număr natural, deducem n = 1. .... 1p

Însă, în acest caz, rangul matricei este 1 şi concluzia se impune.. 1p

b) Elementele de pe diagonala principală vor fi mereu impare. 1p

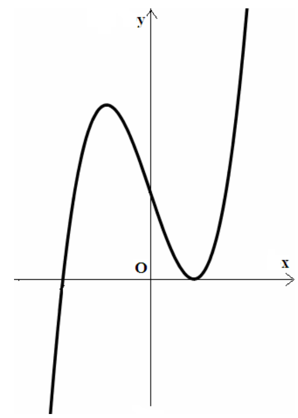
După un număr par de paşi, elementele care nu aparţin diagonalei principale rămân pare 1p

Determinantul matricei obţinute va fi astfel un număr impar, deci nu poate fi egal cu 2012 .... 2p

4. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = ax^3 + bx + c,$ are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura alăturată. Demonstraţi că:

a) $8a + 2b + c \geq 0$

b) $abc < 0$.



Soluţie:

a) Lectura grafică arată că $f(2) \geq 0$, deci $8a + 2b + c \geq 0$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$ 1p

$f(0) = c > 0$ 1p

Deoarece f are două puncte de extrem distincte, ecuaţia de gradul doi care dă punctele critice, $3ax^2 + b = 0$, are două soluţii reale distincte; deducem că $b < 0$ 2p

În concluzie, $abc < 0$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.