CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G=(-2,2)$, definim legea de compoziţie : $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}, \forall x,y\in G$.

a) Demonstraţi că $(G,*)$ este un grup comutativ.

b) Pentru orice $t\in G$, definim funcţia $f:G\to\mathbb{R},\ f(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{dx}{4-x^2}$.

Demonstraţi că f este izomorfism de la $(G,*)$ la $(\mathbb{R},+)$.

<u>Soluţie:</u>

a) Legea * este corect definită 1p
Asociativitate şi comutativitate 1p
e = 0 element neutru 1p
Simetricul elementului $x\in G$ este $x'=-x\in G$ 1p
b) $f(t)=\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{2+t}{2-t}$ 1p
f este bijectivă 1p
$f(x*y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in G$ 1p

2. Se consideră polinomul $f=X^4-aX^3-aX+1$, unde $a\in\mathbb{R}$, având rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

a) Demonstraţi că polinomul f nu se divide cu X^2-1, pentru nici o valoare a lui a.

b) Demonstraţi că pentru $a=\dfrac{1}{2}$, toate rădăcinile lui f au modulul egal cu 1.

<u>Soluţie:</u>

a) f se divide cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(1)=0;\ f(-1)=0$ 1p
Obţinem $2-2a=0$ şi $2+2a=0$ 1p
Sistemul nu are soluţie 1p
SAU
f împărţit la X^2-1 dă restul $r=-2ax+2$ 1p
f se divide cu $X^2-1 \Leftrightarrow r=0$ 1p
$r=0 \Leftrightarrow -2a=0; 2=0$, imposibil 1p
b) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$ 1p
$x+\dfrac{1}{x}=y \Rightarrow 2y^2-y-4=0;\quad y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$ 1p
$x^2-xy_1+1=0$ are rădăcini complexe nenule
$x_1=\alpha+i\beta, x_2=\alpha-i\beta, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $x_1x_2=1\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=1$, deci $|x_1|=|x_2|=1$ 1p
Din $x^2-xy_2+1=0$ analog rezultă $|x_3|=|x_4|=1$ 1p

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Demonstraţi că $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

(Eventual, puteţi schimba variabila prin $x=\pi-t$.)

b) Calculaţi $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

<u>Soluţie:</u>

a) Cu substituţia $x=\pi-t$, obţinem 1p

$I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\cdot(-dt)=$ 1p

$=\int_0^{\pi}\pi\cdot f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}t\cdot f(\sin t)dt$ 1p

$I=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx$ 1p

b) Considerând $f(y)=\frac{y}{1+y^2}$, $I=\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$ 1p

Cu substituţia $\cos x=t\Rightarrow\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx=-\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2-2}$ 1p

$I=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$ (sau $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$) 1p

4. Pe o tablă este scrisă ecuaţia : $x^3+*\cdot x^2+*\cdot x+*=0$. Doi jucători procedează astfel: primul înlocuieşte o steluţă cu un număr întreg, al doilea înlocuieşte una dintre steluţele rămase cu un număr întreg , după care iarăşi primul jucător înlocuieşte ultima steluţă rămasă tot cu un număr întreg. Demonstraţi că primul jucător poate proceda aşa încât ecuaţia să aibă toate rădăcinile întregi.

<u>Soluţie:</u>

Primul jucător înlocuieşte steluţa din faţa lui x cu -1 .... 2p

Al doilea jucător înlocuieşte una din steluţele rămase cu $a\in\mathbb{Z}$ 1p

Primul jucător înlocuieşte steluţa rămasă cu $-a$ 2p

Obţinem ecuaţia $x^3+ax^2-x-a=0$ cu rădăcinile $-a,\ 1,\ -1$ 1p

sau ecuaţia $x^3-ax^2-x+a=0$ cu rădăcinile $a,\ -1,\ 1$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.