CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)e^{-x}$. Notăm $A(n)$ aria mulțimii plane mărginită de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=n$, unde $n\in(1,\infty)$.

a) Calculați $A(n)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)$.

<u>Soluție:</u>

$$A(n)=\int_1^n (x-1)e^{-x}dx=\int_1^n\left(-e^{-x}\right)'(x-1)\,dx=-e^{-x}(x-1)\Big|_1^n+\int_1^n e^{-x}dx=$$

$$=-e^{-n}(n-1)-e^{-n}+e^{-1}=-\frac{n}{e^n}+\frac{1}{e}$$ **5p**

$$\lim_{n\to\infty}A(n)=\frac{1}{e}$$ **2p**

2. Calculați: $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\cdot dx$

<u>Soluție:</u>

<u>Metoda 1</u>

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\cdot x\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)}=$$ **2p**

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}$$ **1p**

$$\Rightarrow x^2+1\equiv(Ax+B)\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=1/2\\ C=0\\ D=1/2\end{cases}$$ **2p**

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\cdot d_x=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d_x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d_x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\mathrm{arctg}\left(\mathrm{x}\sqrt{2}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\mathrm{arctg}\left(\mathrm{x}\sqrt{2}+1\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[\mathrm{arctg}\left(\mathrm{x}\sqrt{2}-1\right)+\mathrm{arctg}\left(\mathrm{x}\sqrt{2}+1\right)\right]+C$$ **2p**

Metoda 2 (soluție deosebită)

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\cdot dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot dx = \int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'\cdot dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)+C$$ **7p**

3. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t^2}\cdot B$, iar $G=\{M_t \mid t>0\}$.

a) Calculați: $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$

b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.

c) Arătați că $(G,\bullet)$ este un grup abelian.

Soluție:

a) Pentru fiecare din cele 4 cerințe câte 0,5 p **2p**
b) Efectuează calculele şi foloseşte corect punctul anterior **2p**
c) Scrierea corectă a celor 5 axiome, invocarea punctului b) şi verificarea celorlalte.. .... **3p**

4. Se dă polinomul cu coeficienți reali $P(x)=x^3+ax^2+bx+c.$

a) Dacă $a,b,c\in\mathbb{Q}$ şi $P(1)=-2$, $P(\sqrt{2})=0$, să se rezolve ecuația $P(x)=0.$

b) Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $|a|,|b|,|c|\le 2010$ şi există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $P(x)=0$, să se demonstreze că $x\le 2010.$

Soluție:

a) $\begin{cases}P(1)=-2\\ P(\sqrt{2})=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b+c=-3\\ 2a+c+\sqrt{2}(b+2)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b+c=-3\\ 2a+c=0\\ b+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=-2\end{cases}$ **3p**

$P(x)=x^3+x^2-2x-2=(x+1)(x^2-2)$
$P(x)=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{2}$ **1p**

b) Reducere la absurd.
Presupunem că $(\exists)x\ge 2011$, care să satisfacă condițiile date **1p**

$P(x)=0\Rightarrow x^3=-ax^2-bx-c\le 2010(x^2+x+1)=\frac{2010}{x-1}\cdot(x^3-1)$ **1p**

Cum $x\ge 2011\Rightarrow x-1\ge 2010\Rightarrow \frac{1}{x-1}\le\frac{1}{2010}\Rightarrow\frac{2010}{x-1}\le 1.$

Obținem: $x^3\le x^3-1$ (absurd) **1p**