CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

1. Se dau funcțiile $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+arcsin\,x$ și

$$g(x)=x\sqrt{1-x^2}-arcsin\,x-4arctg\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right).$$

a) Calculați $f'(x)$ și $g'(x)$.

b) Demonstrați că $f(x)=2\pi+g(x), \forall x\in[0,1]$

Soluție:

a) $f'(x)=2\sqrt{1-x^2}$ **2p**

$g'(x)=2\sqrt{1-x^2}$ **2p**

b) Deducem că: $f(x)-g(x)=c, \forall x\in[0,1]$ **1p**

Pentru $x=1$ avem $c=f(1)-g(1)=2\pi$ sau pentru $x=0$ avem $c=f(0)-g(0)=2\pi$ **1p**

Aşadar $f(x)=2\pi+g(x)$, $\forall x\in[0,1]$ **1p**

2. Un obiect este lăsat să cadă liber; presupunem că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei pe care o atinge obiectul. Timpul t (în secunde) necesar pentru ca obiectul să atingă viteza v (în metri / secundă) este dat de regula $t(v)=\ln\frac{60+v}{60-v}, v\in[0,60)$.

a) În cât timp obiectul ajunge de la viteza $v=0$ m/s până la viteza $v=27,57$ m/s? ($\ln 2,71\simeq 1$)

b) Ce viteză atinge obiectul după 3 secunde? ($e^3\simeq 19,90$)

c) Determinați asimptota verticală a funcției $t=t(v)$.

Notă. În calcule se va considera pentru numărul lui Euler e valoarea aproximativă 2,71, iar numerele vor fi scrise cu două zecimale exacte.

Soluție:

a) Avem că $t(0)=\ln 1=0$, iar $t(27,57)=\ln 2,7=1$, deci timpul cerut este de 1 secundă. **2p**

b) Ecuația $\ln\frac{60+v}{60-v}=3$ are soluția $v=54,26$ m/s. **3p**

c) Domeniul de definiție al funcției $t=t(v)$ este $[0,60)$. Întrucât $\lim\limits_{v\nearrow 60} t(v)=+\infty$, rezultă că dreapta de ecuație $v=60$ este asimptotă verticală (la stânga) pentru funcția *t*. **2p**

3. În $M_3(R)$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $A^3=O_3$ și $\det(I_3+A)\cdot\det(I_3-A+A^2)=1$

b) Calculați $2\cdot A+3\cdot A^2+4\cdot A^3+...+2011\cdot A^{2010}$

c) Calculați $\left(I_3+A\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Soluție:

a) $A^3=O_3$ **1p**

$\det\left(I_3+A\right)\cdot\det\left(I_3-A+A^2\right)=\det\left[\left(I_3+A\right)\left(I_3-A+A^2\right)\right]=\det\left(I_3^{\,3}+A^3\right)=\det(I_3+O_3)=$

$=\det I_3=1$(sau calculează separate fiecare determinant).. **2p**

b)Din $A^3=O_3 \Rightarrow A^n=O_3,\forall n\geq 3$ **1p**

$$2\cdot A+3\cdot A^2+...+2011\cdot A^{2010}=2\cdot A+3\cdot A^2=\begin{pmatrix}0&2&8\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$ **1p**

c) $\left(I_3+A\right)^n=C_n^0\cdot I_3^n+C_n^1\cdot I_3^{\,n-1}\cdot A+C_n^2\cdot I_3^{\,n-2}\cdot A^2+C_n^3\cdot I_3^{\,n-3}\cdot A^3+...$ **1p**

$$\left(I_3+A\right)^n=I_3+nA+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&n&n^2\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$$ **1p**

4. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi matricea $X\left(a\right)=\begin{pmatrix}1+2a&a\\-2a&1-a\end{pmatrix}$

a) Demonstrați că $X\left(a\right)\cdot X\left(b\right)=X\left(a+b+ab\right),\forall a,b\in\mathbb{R}$;

b) Demonstrați că $X^n\left(1\right)=X\left(2^n-1\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$

Soluție:

a) Demonstrează relația din ipoteză prin calcul direct **2p**

b) Verifică relația $X^2\left(1\right)=X\left(3\right)=X\left(2^2-1\right)$ **2p**

Presupune ca $X^k\left(1\right)=X\left(2^k-1\right)$ **1p**

$X^{k+1}\left(1\right)=X^k\left(1\right)\cdot X\left(1\right)=X\left(2^k-1+1+2^k-1\right)=X\left(2^{k+1}-1\right)$ **2p**