CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1. Rezolvați ecuațiile:

a) $\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2, x\in\mathbb{R}$;

b) $4^x-9^x=10^x-15^x, x\in\mathbb{R}$.

Soluție:

a) Condiții necesare: $x+3>0$, $x-3>0$ și $x-3\neq 1$ **1p**

$\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2 \iff \log_3(x+3)\cdot\dfrac{1}{\log_3(x-3)}=2 \iff \log_3(x+3)=\log_3(x-3)^2$ **1p**

$x+3=(x-3)^2 \iff x^2-7x+6=0$ cu $x_1=1$ (respinsă de $x-3>0$), $x_2=6$ soluție unică **1p**

b) $4^x-9^x=10^x-15^x \iff (2^x-3^x)(2^x+3^x-5^x)=0$ **1p**

$2^x-3^x=0 \iff \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=1 \Rightarrow$ Soluție $x=0$ **1p**

$2^x+3^x-5^x=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x=1$ **1p**

Soluție unică $x=1$, deoarece $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ strict monotonă **1p**

2. Se consideră ecuația $z^2+2i(\cos a)\cdot z-\cos^2 a=0$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui a pentru care ecuația admite soluția $z=i\cdot\sin a$.

Soluție:

Avem că $i^2\sin^2 a+2i^2\cos a\cdot\sin a-\cos^2 a=0$, adică $(\sin a+\cos a)^2=0$ sau $\sin 2a=-1$ **4p**

Deducem că $\sin a+\cos a=0$, de unde $a=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ sau din $2a=(-1)^k\dfrac{3\pi}{2}+k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow a=(-1)^k\cdot\dfrac{3\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ **3p**

3. a) Demonstrați că $x-y=\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right), \forall x,y\in\mathbb{R}$;

b) Demonstrați că $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n

Soluție:

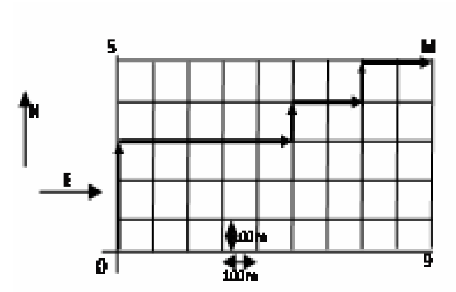
a) Demonstrează prin calcul direct relația din ipoteză **2p**

b) Inegalitatea revine la

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$ **3p**

Însă $\sqrt{n+1}=(n+1)^{\frac{1}{2}}<(n+1)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(n+1)^2}$ și $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}\leq n^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{n^2}$, de unde rezultă inegalitatea din enunț **2p**

4. În desenul alăturat avem o parte din străzile oraşului New York. Oswald se află în $O(0,0)$ şi doreşte să ajungă cât mai repede la Mary aflată în $M(9,5)$. El trebuie să meargă doar spre nord sau spre est, plecând din O pe o linie poligonală(ca în figura alăturată)



a) Câți metri trebuie meargă spre est (orizontal) şi câți spre nord (vertical) pentru a ajunge în M?

b) În câte moduri poate parcurge astfel Oswald drumul din O în M? (Coordonatele punctului M sunt exprimate în unități de lungime, iar o unitate de lungime este 100 m)

<u>Soluție:</u>

Orice drum ar alege el trebuie să facă 900m orizontal (spre est) şi 500 m vertical (spre nord) **3p**

Numărul drumurilor de lungime minimă va fi $C_{14}^{9} = 2002$ ……................……………………………. **4p**