CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

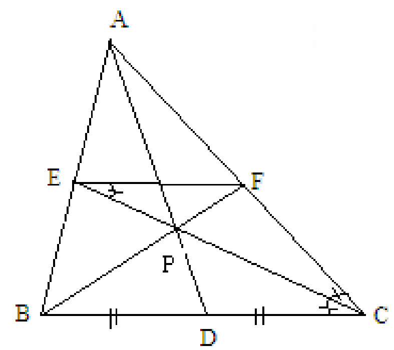
1. În triunghiul *ABC*, mediana *AD* şi bisectoarea [*CE* se intersectează în *P*.

Notăm $\{F\} = BP \cap AC$.

a) Folosind relația dată de Teorema lui Ceva, demonstrați că $EF \parallel BC$.

b) Demonstrați că triunghiul *CEF* este isoscel.

Soluție:



a) $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$ .... **2 p**

Deduce $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow EF \parallel BC$ .... **2 p**

b) Deducem că $\widehat{FEC} \equiv \widehat{ECB}$ (alterne interne), de unde $\widehat{FEC} \equiv \widehat{FCE}$, adică ΔCEF este isoscel **3p**

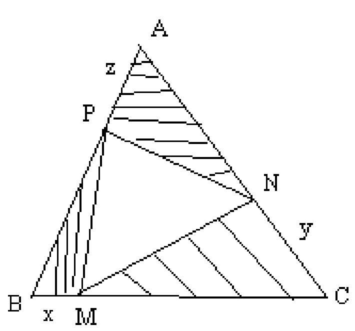
2. Se consideră triunghiul echilateral *ABC*, având latura de lungime 2 cm. Pe laturile acestuia se iau punctele $M \in BC, N \in AC, P \in AB$ astfel încât $BM = x, CN = y$ şi $AP = z$, unde $x, y, z \in (0,2)$.

a) Calculați aria triunghiului *ABC*;

b) Calculați ariile triunghiurilor *PBM, MCN* şi *PAN*, în funcție de *x, y, z.*

c) Deduceți că: $x(2-z) + y(2-x) + z(2-y) < 4$.

Soluție:



a) $A_{\Delta ABC} = \sqrt{3} cm^2 \quad \left(A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \right)$ **1p**

b) $A_{\Delta PBM} = \frac{BM \cdot BP \cdot \sin \widehat{B}}{2} = \frac{x(2-z)\sqrt{3}}{4}$ **1p**

$A_{\Delta MCN} = \frac{CN \cdot CM \cdot \sin \widehat{C}}{2} = \frac{y(2-x)\sqrt{3}}{4}$ **1p**

$A_{\Delta PAN} = \frac{AP \cdot AN \cdot \sin \widehat{A}}{2} = \frac{z(2-y)\sqrt{3}}{4}$ **1p**

c) $A_{\Delta PBM} + A_{\Delta MCN} + A_{\Delta PAN} < A_{\Delta ABC} \Rightarrow x(2-z) + y(2-x) + z(2-y) < 4$ **3p**

3. a) Demonstrați că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b},(\forall)a,b\in\mathbb{R}_{+}^{*},a\neq b$.

b) Demonstrați că $\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+...+\frac{1}{1000}>\frac{13}{20}$.

<u>Soluție:</u>

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}>\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow(a+b)^2>4ab\Leftrightarrow(a-b)^2>0$, adevărat

sau

Din inegalitatea mediilor avem că $\frac{a+b}{2}>\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},(\forall)a,b\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, cu $a\neq b$, deci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{4}{a+b}$ **3p**

b) Grupăm în perechi fracțiile egal depărtate de capete:

$\left(\frac{1}{501}+\frac{1}{1000}\right)+\left(\frac{1}{502}+\frac{1}{999}\right)+...+\left(\frac{1}{750}+\frac{1}{751}\right)$ **1p**

Aplicând punctul a) avem că $\frac{1}{501}+\frac{1}{1000}>\frac{4}{1501};\ \frac{1}{502}+\frac{1}{999}>\frac{4}{1501};\ ...;\ \frac{1}{750}+\frac{1}{751}>\frac{4}{1501}$ **2p**

Prin sumarea acestor inegalități obținem că suma din stânga este mai mare decât $250\cdot\frac{4}{1501}$.

Cum $\frac{1000}{1501}>\frac{13}{20}$ rezultă concluzia problemei **1p**

4. Doi melci M_1 şi M_2 au plecat la ora 7 dimineața din punctul A spre punctul B, mergând în linie dreaptă. Viteza lui M_1 este de 12 m / oră. La început M_2 a avut o viteză de 8 m / oră dar, la 2 ore de la plecare s-a suit pe spatele unei broaşte țestoase T care plecase tot din A spre B cu viteza de 20 m / oră. Melcul M_2 şi broasca T l-au ajuns pe M_1 şi după încă 4 ore au ajuns în B. Melcul M_2 a coborât imediat de pe spatele lui T şi a plecat din B spre A cu o viteză mai mică de 4 m / oră.

a) La ce oră M_2 îl ajunge pe M_1 ?
b) Care este distanța dintre A şi B ?
c) Între ce ore (numere întregi) M_1 l-a întâlnit pe M_2, care se întorcea din B spre A ?

A $\longrightarrow$ B

Ora / Distanța parcursă de:	7	9	10	
M_1	0	24	36	
M_2	0	36	36	

Soluție:

a) Până la ora 9 melcul M_1 parcurge 24 m iar melcul M_2 parcurge 16 m **1p**

b) Până la ora 10 melcul M_1 parcurge 36 m iar melcul M_2 parcurge 16 + 20 = 36 m
(deci la ora 10 M_2 îl ajunge pe M_1) **1p**
(*Dacă face direct această afirmație se acordă* .... **2p**)

b) M_2 şi T ajung în B la ora 14, deci distanța dintre A şi B este $36 + 4 \cdot 20 = 116$ m **1p**
c) La ora 14 melcul M_2 se afla la $7 \cdot 12 = 84$ m de A şi mai are de parcurs $116 - 84 = 32$ m până în B **1p**
În următoarele 2 ore melcul M_1 a mai parcurs încă 24 mşi mai are de parcurs încă 8 m până în B **1p**
În aceste 2 ore, M_2 a parcurs mai puțin de 8 m şi deci încă nu s-au întâlnit **1p**
M_1 şi M_2 se întâlnesc între orele 16 şi 17 .... **1p**