

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Demonstrați că:

a) $\frac{x^2}{3} \geq 2x - 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$;

c) $\log_a 3 + \log_b 3 \geq 4 \log_{ab} 3$ pentru orice $a, b \in (1, +\infty)$

d) Determinați numerele $a, b \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, dacă $ab = 9$ și $\log_a(2a-3) + \log_b(2b-3) \geq \log_a 3 + \log_b 3$

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x-3)^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$ **1p**

b) Inegalitatea se reduce la $(x-y)^2 \geq 0$ **1p**

c) $\log_a 3 + \log_b 3 = \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_3 b} \geq \frac{4}{\log_3 a + \log_3 b} = \frac{4}{\log_3 ab} = 4 \log_{ab} 3$ **2p**

d) Conform a) $\log_a(2a-3) + \log_b(2b-3) \leq \log_a \frac{a^2}{3} + \log_b \frac{b^2}{3} = 4 - \log_a 3 - \log_b 3$ **1p**

Rezultă $4 - \log_a 3 - \log_b 3 \geq \log_a 3 + \log_b 3 \Rightarrow \log_a 3 + \log_b 3 \leq 2$ **1p**

Conform b) $\log_a 3 + \log_b 3 \geq 2$. Atunci $\log_a 3 + \log_b 3 = 2$, dar $ab = 9$ rezultă $a = b = 3$ **1p**

2. La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevului sosit pe locul k ($k = \overline{1,9}$) i se acordă $\frac{10}{k}$ puncte. Juriul concursului a constatat următoarele

condiții îndeplinite simultan:

- a) Oricare doi elevi nu au sosit în același timp;
- b) Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite;
- c) Elevii liceului C au sosit unul după altul;
- d) Fiecare elev de la liceul B avea chiar în față sa un elev de la liceul A.

Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

Soluție:

Din b) și c) rezultă că elevii liceului C au ocupat locurile 3, 4 și 5 **1p**

Elevii se vor distribui după tabloul:

Locul	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elev de la liceul	A	B	C	C	C	A	B	A	B

Din b) și d) rezultă că locul 1 va fi ocupat de un elev de la A, iar pe locul 2 un elev de la B **1p**

Din d) rezultă locurile 6 și 8 sunt ocupate de elevi de la liceul A, iar locurile 7 și 9 au fost ocupate de elevi de la liceul B **1p**

Punctajele obținute sunt:



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Liceul A: $10 + \frac{10}{6} + \frac{10}{8} = \frac{310}{24} \approx 12,916$ puncte **1p**

Liceul B: $\frac{10}{2} + \frac{10}{7} + \frac{10}{9} = \frac{950}{126} \approx 7,539$ puncte **1p**

Liceul C: $\frac{10}{3} + \frac{10}{4} + \frac{10}{5} = \frac{470}{60} \approx 7,833$ puncte **1p**

Ordinea ocupată de cele trei licee este: A - C - B **1p**

- 3.** Păcală produce vin de tărie P% și ar putea umple un butoi în P ore. Tândală produce vin de tărie T% și ar putea umple același butoi în T ore. Lucrând împreună ei umplu butoiul în 6 ore. Ce tărie va avea vinul obținut astfel ?

Soluție:

Fie V – volumul butoiului.

Într-o oră:

Păcală umple $\frac{V}{P}$ din butoi **2p**

Tândală umple $\frac{V}{T}$ din butoi **1p**

Împreună $\left(\frac{V}{P} + \frac{V}{T}\right)$ din butoi **1p**

În 6 ore: $6\left(\frac{V}{P} + \frac{V}{T}\right) = V$ **1p**

Tăria: $\frac{\left(\frac{V}{P} \cdot P\% + \frac{V}{T} \cdot T\%\right)}{\frac{V}{P} + \frac{V}{T}} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{1}{P} + \frac{1}{T}} = \frac{2}{\frac{1}{100}} = \frac{2}{6} = \frac{12}{100} = 12\%$ **2p**

- 4.** Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție care verifică relația $f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y) \geq 2^{x+y}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $f(0) = 1$;

b) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$

Soluție:

a) $x = y = 0 \Rightarrow f(0) \geq f^2(0) \geq 1 \Rightarrow f(0)(1 - f(0)) \geq 0, f(0) > 0 \Rightarrow f(0) \leq 1$ **1p**

Cum $f(0) \geq 1 \Rightarrow f(0) = 1$ **1p**

b) $y = -x \Rightarrow 1 = f(0) \geq f(x) \cdot f(-x) \geq 1$ **1p**

c) $f(x) \geq 2^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **1p**

$f(-x) = \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2^x} = 2^{-x}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq 2^x, x \in \mathbb{R}$ **2p**

În concluzie, $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$ **1p**

