CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A X A

1. Demonstrați că, pentru orice număr complex de modul 1, are loc inegalitatea $|2+iz|\leq 3$. Când se atinge egalitatea?

2. Spunem că un grup format din şase persoane este *aproape unit* dacă orice persoană din grup are exact doi cunoscuți în cadrul grupului. (Presupunem că, dacă A îl cunoaşte pe B, atunci şi B îl cunoaşte pe A.)
a) Arătați că există grupuri de 6 persoane aproape unite care pot fi împărțite în două grupuri de câte trei persoane astfel încât, în cadrul fiecărui grup de trei, toate persoanele să se cunoască între ele.
b) Arătați că există grupuri de 6 persoane aproape unite care pot fi împărțite în două grupuri de câte trei persoane, astfel încât în cadrul fiecărui grup de trei să nu existe perechi de cunoscuți.

3. Pe tablă sunt scrise numerele 2, 0, 1 şi 0. La fiecare pas se măreşte cu 2 cel mai mic dintre numerele aflate pe tablă. (Dacă, la un moment dat, pe tablă sunt mai multe numere egale, se măreşte cu 2 unul dintre ele, la întâmplare.) După câți paşi apare scris pentru prima dată pe tablă numărul 2010?

4. Pentru fiecare număr real a, considerăm funcția $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_a(x)=ax+2-a$. Notăm cu M_a simetricul originii față de graficul funcției f_a.
a) Arătați că graficele tuturor funcțiilor f_a au un punct comun.
b) Demonstrați că lungimea segmentului M_aM_b este cel mult egală cu $2\sqrt{5}$, oricare ar fi numerele reale a şi b.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7