CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea ştiințele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Fie polinoamele $g, h \in \mathbb{Z}_{19}[X]$, $g = X^{18} - \hat{1}$ şi $h = (X-\hat{1})(X-\hat{2})(X-\hat{3})...(X-\widehat{18})$.

a) Demonstrați că $\hat{b}^{18} = \hat{1}, \forall b \in \mathbb{Z}_{19}^*$.

b) Arătați că $g = h$.

c) Calculați sumele $\sum\limits_{1 \le i < j \le 18} \hat{i} \cdot \hat{j}$ şi $\sum\limits_{1 \le i < j < k \le 18} \hat{i} \cdot \hat{j} \cdot \hat{k}$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Soluție

a) $(\mathbb{Z}_{19}^*, \cdot)$ este grup finit de ordin 18, prin urmare $\hat{b}^{18} = \hat{1}, \forall b \in \mathbb{Z}_{19}^*$ 3p

b) g, h au aceleaşi 18 rădăcini 1p

Dacă $f = g - h \in \mathbb{Z}_{19}[X]$, atunci $f(\hat{b}) = \hat{0}, \forall b \in \mathbb{Z}_{19}^*$ şi grad f < 18, deci $f \equiv 0$ şi atunci g = h ... 1p

c) Ambele sume sunt egale cu $\hat{0}$, lucru uşor de argumentat cu relațiile lui Viéte pentru polinomul g şi utilizând punctului b)

$\sum\limits_{1 \le i < j \le 18} \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{0}$ 1p

$\sum\limits_{1 \le i < j < k \le 18} \hat{i} \cdot \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{0}$ 1p

2. Se dă funcția $\beta : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, \beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} \cdot (1-t)^{q-1} \, dt$.

a) Calculați β(2, 2) şi β(p, 1).

b) Folosind schimbare de variabilă t = 1 - u, demonstrați că $\beta(p,q) = \beta(q,p), \forall p, q \in \mathbb{N}^*$

c) Deduceți relația de recurență $\beta(p,q) = \frac{q-1}{p} \beta(p+1, q-1), \forall p, q \in \mathbb{N}^*, q \ge 2$.

d) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \beta(n,n)$.

Soluție

a) $\beta(2,2) = \int_0^1 t \cdot (1-t) \, dt = \frac{1}{6}$ 2p

$\beta(p,1) = \int_0^1 t^{p-1} dt = \frac{1}{p}$ 2p

b) Cu schimbarea de variabilă $t = 1 - u \Rightarrow \beta(p,q) = \beta(q,p)$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea ştiințele naturii

c)

$$\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\int_0^1\left(\frac{t^p}{p}\right)'(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{t^p}{p}(1-t)^{q-1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t^p}{p}(q-1)(1-t)^{q-2}(-1)\,dt=$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-2}\,dt=\frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)\Rightarrow\beta(p,q)=\frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$$ 2p

3. Într-un vas de cultură sunt, la momentul t = 0, b_0 bacterii. S-a observat că funcția $n:[0,\infty)\to(0,\infty)$ definită prin: n(t) este numărul bacteriilor din vas la momentul t, satisface relația $n'(t)=k\cdot n(t),\forall t\ge 0$ (n' este derivata funcției n, iar k o constantă strict pozitivă, care depinde de mediul de cultură ales). Arătați că, dacă inițial sunt b_0 = 300 bacterii iar k = 0,1 atunci, pentru t $\ge$ 20, numărul bacteriilor din vas este mai mare decât 2010.

Lucian Dragomir, Oțelu-Roşu

Soluție:

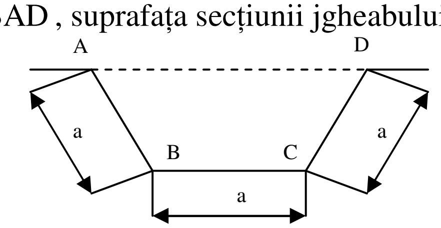
Avem $n(t)>0,\forall t\ge 0$ şi $\frac{n'(t)}{n(t)}=k\Rightarrow \ln'(n(t))=k\Rightarrow \ln n(t)=kt+C\Rightarrow n(t)=e^{kt+C};\forall t\ge 0$ 2p

Dar $n(0)=b_0=e^C\Rightarrow n(t)=b_0\cdot e^{kt},\forall t\ge 0$ 2p

Pentru $b_0=300,k=\frac{1}{10}\Rightarrow n(t)=300\cdot e^{\frac{t}{10}},\forall t\ge 0$ 1p

Fie $t\ge 20\Rightarrow n(t)\ge n(20)=300\cdot e^2>300\cdot 2,7^2=2187>2010$ 2p

4. Din trei scânduri egale cu lățimea a (cm) se face un jgheab a cărei secțiune are forma unui trapez isoscel ABCD, unde AB + BC + CD = 3a (vezi figura de mai jos). La ce valoare a unghiului $\sphericalangle BAD$, suprafața secțiunii jgheabului este maximă ?



Soluție

Se află înălțimea trapezului h = a sinα, $\alpha=m(\sphericalangle BAD)$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

Se află baza mare a trapezului de secțiune AD = a + 2acosα 1p

Aria trapezului $A = \frac{(AD + BC)\cdot h}{2} = \frac{(2a + 2a\cos\alpha)\cdot h}{2} = a^2(1+\cos\alpha)(\sin\alpha)$ 1p

Considerăm funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(\alpha) = a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$ 1p

$f'(\alpha) = a^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$ 1p

$f'(\alpha) = 2a^2(\cos\alpha + 1)\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)$ 1p

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		+ + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - - -	0
$f(\alpha)$		$\nearrow \nearrow$		$\searrow \searrow$	

Aria (f) este maximă pentru $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 1p