

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Unui elev i se scrie pe tablă matricea $A = \begin{pmatrix} -10 & * & -7 \\ * & -2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

Profesorul îi cere să înlocuiască asteriscurile cu numere întregi astfel încât, după completare, sumele tuturor numerelor de pe fiecare linie, fiecare coloană și de pe cele două diagonale să fie egale. Este posibil acest lucru ? În caz afirmativ ce matrice obține elevul ?

Mihai Ispas, Iași

Soluție.

Elevul notează cu x elementul de pe linia 1 și coloana 2.

Folosind ipotezele se obține o primă formă a matricei: $A = \begin{pmatrix} -10 & x & -7 \\ * & -2 & * \\ x-8 & -15 & x-5 \end{pmatrix}$,

întrucât toate sumele trebuie să fi $x - 17$ 3p

Din $x - 8 - 15 + x - 5 = x - 17$ rezultă $x = 11$ 2p

Așadar, toate sumele trebuie să fie -6 1p

Obține $A = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -7 \\ 1 & -2 & -5 \\ 3 & -15 & 6 \end{pmatrix}$ 1p

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$, unde $a \in \mathbb{Z}$. Graficul funcției f intersectează axa Ox în trei puncte distincte.

a) Determinați valorile posibile ale lui a .

b) Abscisele celor trei puncte de intersecție ale graficului cu Ox pot fi toate numere întregi?

Lucian Dragomir, Oțelu-Roșu

Soluție.

a) Funcția este derivabilă, cu derivata $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Punctele critice sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$. Avem că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(1) = a + 4$, $f(3) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 2p

Folosind șirul lui Rolle sau urmărind variația funcției, obținem că graficul intersectează axa Ox în trei puncte distincte dacă și numai dacă $a + 4 > 0$ și $a < 0$, deci când $a \in (-4, 0)$. Cum a este număr întreg, reținem valorile $a \in \{-3, -2, -1\}$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Profil real, specializarea științele naturii

b) Abscisa punctului de intersecție cu Ox care aparține intervalului (1,3) este număr întreg dacă și numai dacă este egală cu 2. Condiția $f(2)=0$ conduce la $a=-2$, iar în acest caz $f(x)=(x-2)(x^2-4x+1)$. Cum zerourile expresiei din paranteză sunt numere iraționale, răspunsul la întrebarea problemei este negativ. 3p

3. Se consideră funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f(A) = \det(A^2 + I_2), \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluție.

Considerând, de exemplu, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem că $A^2 = O_2 = O_2^2$, deci $f(A) = f(O_2)$ 3p

Deducem că f nu este injectivă.

Pentru orice matrice A cu elemente reale, $\det(A^2 + I_2) = \det(iA + I_2) \cdot \det(-iA + I_2) =$

$\det(iA + I_2) \cdot \overline{\det(iA + I_2)} = |\det(iA + I_2)|^2 \geq 0$, deci funcția nu ia valori negative. 4p

4. Două drumuri rectilinii și perpendiculare se întâlnesc în O. Din O pleacă simultan două mobile A și B, fiecare pe câte unul dintre drumuri, cu viteze constante $v_1 = 80\text{km/h}$, respectiv $v_2 = 100\text{km/h}$. După două ore, ambele mobile își schimbă sensul de mers, îndreptându-se spre O pe aceleași drumuri (și eventual depășind punctul O), A cu viteza v_2 iar B cu viteza v_1 , și merg astfel timp de încă două ore. În ce moment (ulterior schimbării sensului de mers) distanța dintre cele două mobile este minimă?

Gabriel Popa, Iași

Soluție.

Gândim cele două drumuri ca formând un sistem cartezian, orientarea axelor fiind dată de sensurile inițiale ale celor două mobile. Măsurând timpul din momentul schimbării sensului de mers, la momentul $t \in [0, 2]$, mobilul A se află în punctul $(160-100t)$, iar B se află în punctul $(0, 200-80t)$. Distanța dintre ele este $\sqrt{(160-100t)^2 + (200-80t)^2}$ 4p

Trebuie să studiem variația funcției $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 20\sqrt{41t^2 - 160t + 164}$. Se constată că f are un punct de minim pentru $t = \frac{80}{41}$, deci distanța minimă între cele două mobile se atinge după aproximativ 1,95 ore. 3p