# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
# *"ADOLF HAIMOVICI"*
# ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009

**Profil real, specializarea ştiinţele naturii**
**BAREM DE CORECTARE - CLASA A XII A**

**1. a)** Se verifică asociativitatea: $(x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}$. ........................................... 2p

Element *destroyer* este –a. ........................................................................................................ 2p

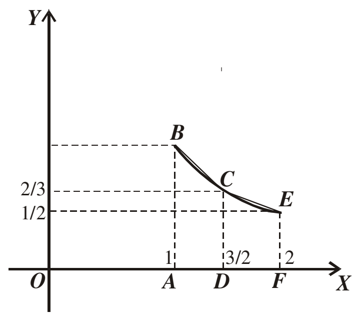
**b)** Deoarece –a este *destroyer*, avem că $(-2009a)*(-2008a)*...*0*a*...(2009a) = -a < 0$. .... 3p

**2.** Volumul cutiei obținute este $f(x) = x(1-2x)^2 = 4x^3 - 4x^2 + x$, unde $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.................. 3p

Cum $f'(x) = 12x^2 - 8x + 1$ este pozitivă pe $\left(0;\frac{1}{6}\right)$ şi negativă pe $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$, înseamnă că funcția f îşi atinge maximul pentru $x = \frac{1}{6}$, volumul maxim al cutiei fiind $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{27}$ $m^3$. ........................ 4p

*Soluție alternativă*: Trebuie să demonstrăm că $f(x) \le \frac{2}{27}, \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. Aceasta revine la a arăta că $4x^3 - 4x^2 + x - \frac{2}{27} \le 0 \Leftrightarrow 4\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\left(x-\frac{2}{3}\right) \le 0, \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, inegalitate care este evident adevărată. Egalitatea se atinge pentru $x = \frac{1}{6}$........................................................................... 4p

**3. a)** Avem că $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0, \forall x \in [1,2]$, deci f este convexă, iar $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2$ 3p




**b)** $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx < A_{ABCD} + A_{CDEF} = \frac{\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2} + \frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{4} + \frac{\frac{7}{6}}{4} = \frac{\frac{5}{3}+\frac{7}{6}}{4} = \frac{17}{24} < 0,72$ ................................ 4p

**4. a)** $\int \frac{s^3}{s^4+1}ds = \frac{1}{4}\ln(s^4+1) + \mathcal{C}$ ........................................................................................ 3p

**b)** Avem că $I + J = \int \frac{x^{2000}+x^{666}}{x^{2668}+1}dx = \int \frac{x^{666}+\frac{1}{x^{668}}}{x^{1334}+\frac{1}{x^{1334}}}dx = \frac{1}{667}\int \frac{\left(x^{667}-\frac{1}{x^{667}}\right)'}{\left(x^{667}-\frac{1}{x^{667}}\right)^2+2}dx =$

$= \frac{\sqrt{2}}{1334}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^{667}-\frac{1}{x^{667}}}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{C}$, iar $I - J = \int \frac{x^{2000}-x^{666}}{x^{2668}+1}dx = \int \frac{x^{666}-\frac{1}{x^{668}}}{x^{1334}+\frac{1}{x^{1334}}}dx =$

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009

**Profil real, specializarea ştiinţele naturii**

$$=\frac{1}{667}\int\frac{\left(x^{667}+\frac{1}{x^{667}}\right)'}{\left(x^{667}+\frac{1}{x^{667}}\right)^{2}-2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2668}\ln\left(\frac{x^{667}+\frac{1}{x^{667}}-\sqrt{2}}{x^{667}+\frac{1}{x^{667}}+\sqrt{2}}\right)+\mathcal{C}$$ ...................................................... 3p

Rezultă că $\int\frac{x^{2000}}{x^{2668}+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{2668}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^{667}-\frac{1}{x^{667}}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{5336}\ln\left(\frac{x^{667}+\frac{1}{x^{667}}-\sqrt{2}}{x^{667}+\frac{1}{x^{667}}+\sqrt{2}}\right)+\mathcal{C}$, iar

$$\int\frac{x^{666}}{x^{2668}+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{2668}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^{667}-\frac{1}{x^{667}}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{5336}\ln\left(\frac{x^{667}+\frac{1}{x^{667}}-\sqrt{2}}{x^{667}+\frac{1}{x^{667}}+\sqrt{2}}\right)+\mathcal{C}$$ .................................... 1p