CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22 - 24 mai 2009
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE - CLASA A X A

1. Avem că $f \circ g$, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = abx + a^2 + b$ iar $(g \circ f)(x) = abx + b^2 + a$ 3p

Graficele sunt drepte paralele dacă şi numai dacă $a^2 + b \neq b^2 + a$, adică $(a-b)(a+b-1) \neq 0$ 2p

Obținem că $a \in \mathbb{R}^*$ poate fi ales arbitrar iar, odată ales a, vom lua $b \in \mathbb{R} \setminus \{0; a; 1-a\}$ oarecare..... 2p

2. Din a treia ecuație rezultă că $z = |y| > 0$ 2p

Înlocuind în a doua ecuație, obținem că $x = \pm 10$ 1p

Dacă x = 10 şi $z = y > 0$, vom avea că $\sqrt{10+z} + \sqrt{10+z} = 6$, de unde $z = -1$, imposibil. Dacă x = 10 şi $z = -y > 0$, deducem că $\sqrt{10-z} + \sqrt{10+z} = 6$, deci z = 6 şi y = -6. Dacă x= -10 şi $z = y > 0$, obținem că $\sqrt{-10+z} + \sqrt{-10+z} = 6$, prin urmare z = 19, y = 19. În sfârşit, când x = -10 şi $z = -y > 0$, cantitatea -10-z este negativă, deci nu are sens primul radical. În concluzie, $(x, y, z) \in \{(10; 6; -6), (-10, 19, 19)\}$ 4p

3. a) $S_1 \cap [0; 2\pi] = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$ 2p

b) Toate cele trei ecuații sunt echivalente (deci perechile de ecuații echivalente sunt (E_1, E_2), (E_2, E_3), (E_3, E_1)) 2p

c) De exemplu, $\sin^2 x = \frac{1}{4}$. 3p

4. Notând x = CD, $\alpha = m(\sphericalangle ADC), \beta = m(\sphericalangle BDC)$, avem că $tg(\sphericalangle ADB) = tg(\alpha - \beta) =$

$$= \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \left(\frac{AC}{CD} - \frac{BC}{CD}\right) : \left(1 + \frac{AC}{CD} \cdot \frac{BC}{CD}\right) = \left(\frac{22,5}{x} - \frac{16,9}{x}\right) : \left(1 + \frac{22,5}{x} \cdot \frac{16,9}{x}\right) = \frac{5,6 \cdot x}{x^2 + 380,25}$$ ... 4p

Unghiul $\sphericalangle ADB$ este maxim atunci când expresia $\frac{5,6 \cdot x}{x^2 + 380,25} = \frac{5,6}{x + \frac{380,25}{x}}$ este maximă, deci când numărul $x + \frac{380,25}{x}$ este minim. Însă $x + \frac{380,25}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{380,25}{x}} = 2 \cdot 19,5 = 39$, egalitatea fiind atinsă când $x = \frac{380,25}{x}$, adică x = 19,5 m. 3p