

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI

Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XI-a

1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $|b - c| < a < b + c$. Considerăm

$$\text{sistemul } \begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b, \text{ cu necunoscutele } x, y, z. \\ bz + cy = a \end{cases}$$

a) Demonstrați că sistemul are o unică soluție (x_0, y_0, z_0) .

b) Arătați că x_0, y_0, z_0 sunt numere reale cu modulul subunitar.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(x) = f(2x), \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că funcția definită prin $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ are proprietatea din enunț.

b) Demonstrați că $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Determinați funcțiile continue cu proprietatea dată.

3. O sursă de lumină este amplasată într-un punct S , la înălțimea de x metri deasupra centrului O al unei piste circulare avînd raza de $20\sqrt{2}$ metri. Intensitatea luminii într-un punct oarecare M al pistei variază funcție de x după legea $I(x) = k \frac{\sin \alpha}{d^2}$, unde k este o constantă, $d = SM$, iar $\alpha = m(\widehat{SMO})$. Aflați x astfel încât intensitatea luminii într-un punct oarecare de pe conturul exterior al pistei să fie maximă.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cătălin construiește noi matrice, plecând

de la A , astfel:

- în prima etapă, alege cinci elemente ale lui A , cărora le schimbă semnul;
- în continuare, poate efectua de oricâte ori dorește următoarele operații: fie adună la o linie elementele unei alte linii, fie adună la o coloană elementele unei alte coloane.

a) Arătați că determinantul matricei obținută după prima etapă este 0, 4 sau -4.

b) Poate Cătălin obține, la un moment dat, matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7