CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 16 - 18 mai 2008 IAȘI
Profil real, specializarea științele naturii
BAREM DE CORECTARE - CLASA a XII-a

Subiectul 1.

a) Se verifică axiomele corpului.. 4p

b) Răspunsul este negativ: dacă ar exista $f:\mathbb{Q}(i)\to\mathbb{Q}$ izomorfism de corpuri, am avea că $f(1)=1$ și fie a = f(i), cu $a\in\mathbb{Q}$.

Atunci $1=f(1)=f(-(-1))=-f(-1)=-f(i^2)=-[f(i)]^2=-a^2$, absurd 3p

Subiectul 2.

a) Avem că

$$f(x)=\int_0^1\frac{-x^2}{1-x^2t}dt-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2t}dt=\ln\left(1-x^2t\right)\Big|_0^1-\ln\left(1+x^2t\right)\Big|_0^1=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2},\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$ 4p

b) Integrând prin părți, găsim primitivele $x\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}+\ln\frac{1+x}{1-x}-2\text{arctg}x+k$. Primitiva al cărei grafic trece prin origine se obține pentru k = 0 .... 3p

Subiectul 3.

Considerăm ecuația $g(y)=y^3+ay^2+by+c=0$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}, a>0, c<0$. Vom arăta că această ecuație are o singură soluție reală pozitivă, prin urmare P are exact două rădăcini reale. 3p

Cum $g(0)=c<0, \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty>0$, înseamnă că g are o rădăcină reală pozitivă, fie aceasta x_1 . Dacă x_2 și x_3 sunt complexe nereale, rezolvarea este încheiată. 2p

Dacă $x_2,x_3\in\mathbb{R}$, cum $x_1x_2x_3=-c>0$, înseamnă că x_2, x_3 sunt fie ambele pozitive, fie ambele negative. Însă $x_1+x_2+x_3=-a<0$, prin urmare x_2, x_3 sunt ambele negative 2p

Subiectul 4.

a) Avem că $y=\pm\frac{b}{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, cu $x\in[-a,a]$, prin urmare curba dată este reuniunea graficelor funcțiilor $f_{1,2}:[-a,a]\to\mathbb{R}, f_{1,2}(x)=\pm\frac{b}{a}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2p

b) Aria unui sfert din suprafața dată este $A=\frac{b}{a}\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx$ 1p

Pentru a calcula această integrală, putem efectua schimbarea de variabilă $x=a\cos^3u$, obținând

$$A=3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4u\cos^2u\,du=3ab\left[\frac{1}{6}\sin^5u\cos u-\frac{1}{24}\sin^3u\cos u-\frac{1}{16}\sin u\cos u+\frac{1}{16}u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$=\frac{3ab\pi}{32}$. În concluzie aria suprafeței date este $\frac{3ab\pi}{8}$ 4p