Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=6$ și $b_3=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-4$. Determinați numerele reale a, pentru care $f(-a)+f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}=16\cdot 4^{-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ și $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ și $B(a,b)=\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1,2))=-1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A\cdot B(a,b))=0$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=|x-y|+1$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$.

5p **b)** Calculați $a-b$, știind că $a=(2\circ 3)\circ 4$ și $b=2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 2f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^e f(e^x)\,dx\leq\int_0^e e^{f(x)}\,dx$.