MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
18 mai 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Ştiințe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.
Un mobil M se mişcă în planul xOy astfel încât, în fiecare moment $t \geq 0$, coordonatele sale sunt $x = x(t) = 1 + 3\cos t,\ y = y(t) = -2 + 3\sin t$. La momentul $t \geq 0$, vectorul viteză $\vec{v}$ este dat de $\vec{v}(t) = x'(t)\cdot\vec{\mathrm{i}} + y'(t)\cdot\vec{\mathrm{j}}$.

a) Demonstraţi că punctul M se mişcă pe un cerc.
b) Arătaţi că, pe întreaga durată a mişcării, vectorul viteză are acelaşi modul.

SOLUȚIE:
a) Considerăm punctul $A(1,-2)$; deoarece $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9$, $\forall t \geq 0$, punctul M se află, în orice moment, pe cercul de centru A şi rază 3. .... 3p
b) Vectorul viteză este $\vec{v}(t) = -3\sin t\cdot\vec{\mathrm{i}} + 3\cos t\cdot\vec{\mathrm{j}}$ 2p
Modulul vitezei este $|\vec{v}| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = 3, \forall t \geq 0$. 2p

Problema 2.
Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \log_2 56 & 3 \\ 0 & \log_2 7 \end{pmatrix}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, notăm cu S_n suma elementelor matricei A^n.
a) Demonstraţi că $S_n = 2\log_2^n 56$, oricare ar fi numărul natural nenul n.
b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $S_n \leq 2019$.

SOLUȚIE:
a) Se arată, prin inducţie, că $A^n = \begin{pmatrix} \log_2^n 56 & \log_2^n 56 - \log_2^n 7 \\ 0 & \log_2^n 7 \end{pmatrix}$ şi, de aici, cerinţa problemei. 3p
b) Pentru $n \leq 3$, avem că $S_n \leq S_3 = 2\log_2^3 56 < 2\log_2^3 64 = 2\cdot 6^3 < 2019$. 2p
Observăm că $\log_2 7 > 2{,}75 \left(\Leftrightarrow 7 > 2^{2{,}75} \Leftrightarrow 7^4 > 2^{11}\right)$, prin urmare $\log_2 56 > 5{,}75$.
Rezultă că $S_4 = 2\cdot\log_2^4 56 > 2\cdot 5{,}75^4 > 2019$, aşadar numerele căutate sunt $\{1,2,3\}$. 2p

Problema 3.

Se consideră funcţia $f:[-2,0)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\sqrt{x+2}$.

a) Arătaţi că funcţia *f* are două puncte de extrem local.

b) Demonstraţi că oricare ar fi $m\in(-\infty,0)$, există un unic $x_m\in(-1,0)$ pentru care $f(x_m)=m$.

SOLUŢIE:

a) Funcţia *f* este derivabilă pe $(-2,0)$ şi $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^3\sqrt{x+2}}, \forall x\in(-2,0)$, unde $g(x)=x^3+3x+8$.

Cum $g'(x)=3x^2+3>0, \forall x$, iar $g(-2)\cdot g(-1)=(-6)\cdot 4<0$, rezultă că există unic $x_0\in(-2,-1)$ cu $g(x)<0, \forall x\in(-2,x_0), g(x_0)=0, g(x)>0, \forall x\in(x_0,0)$. Semnul lui f' este invers semnului lui *g*, prin urmare *f* este strict crescătoare pe $(-2,x_0)$ şi strict descrescătoare pe $(x_0,0)$. ………………………… 3p

Funcţia *f* are două puncte de extrem local: -2 este punct de minim, iar x_0 este punct de maxim. ……………………………………………………………………………………… 1p

b) Funcţia *f* este continuă pe $(-1,0)$ şi $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=0, \lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=-\infty$, de unde existenţa unei soluţii $x_m\in(-1,0)$ a ecuaţiei $f(x)=m$. ……………………………………………………………… 2p

Unicitatea soluţiei rezultă din faptul că *f* este strict descrescătoare pe $(-1,0)$. ………………………… 1p

Problema 4.

Spunem că matricele $A,B,C\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ au proprietatea (P) dacă $A^2=BC, B^2=CA$ şi $C^2=AB$.

a) Dacă matricele A,B,C au proprietatea (P), arătaţi că $A^3=B^3=C^3$.

b) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de matrice distincte două câte două, cu toate elementele reale, care au proprietatea (P).

c) Demonstraţi că există o infinitate de triplete de matrice distincte două câte două, având toate elementele numere complexe nereale, care au proprietatea (P).

SOLUŢIE:

a) Avem că $A^3=A\cdot A^2=A\cdot BC=AB\cdot C=C^2\cdot C=C^3$ şi analoagele. ………………………… 3p

b) De exemplu, luăm $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&0&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, unde *a*, *b*, *c* sunt numere reale distincte două câte două. …………………………………………………………………………………… 2p

c) De exemplu, luăm $A=\begin{pmatrix}a\mathrm{i}&a\mathrm{i}&a\mathrm{i}\\a\mathrm{i}&a\mathrm{i}&a\mathrm{i}\\a\mathrm{i}&a\mathrm{i}&a\mathrm{i}\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}^*$, $B=\varepsilon A$ şi $C=\varepsilon^2 A$, unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………… 2p

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*