MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ 18 mai 2019

Filiera Teoretică: profilul Real - Ştiințe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.
Un client depune la bancă 10000 lei cu dobânda unitară anuală 2% într-un depozit pe doi ani cu dobândă compusă. Simultan, banca acordă unui alt client un credit de 10000 lei, pentru doi ani, cu dobânda unitară anuală de 6%. Care este profitul băncii după aceste operațiuni?

SOLUŢIE:

Suma finală la depozit este $10000\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^2=10404$ lei 2p
Dobânda datorată la începutul creditului este de 600 lei 1p
După primul an clientul mai are de achitat 5300 lei, la care se adaugă o dobândă de 318 lei.................. 2p
Banca primeşte $10600+318=10918$ lei 1p
Profitul băncii este de $10918-10404=514$ lei 1p

Problema 2.
Se consideră mulțimea $M=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ şi pentru orice $z_1,z_2\in M$ se defineşte expresia $E(z_1,z_2)=\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}\cdot z_2}$.

a) Rezolvați în mulțimea M ecuația $E(z,-z)=\frac{i}{n}$, unde $n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

b) Dacă $z_1,z_2\in M$ astfel încât $E(z_1,z_2)-E(z_2,z_1)\in\mathbb{R}$, arătați că $z_1-z_2\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că $E(z_1,z_2)\in M$, pentru orice $z_1,z_2\in M$.

SOLUŢIE:

a) 2p, din care:

Ecuația are două soluții în $\mathbb{C}$: $z_1,z_2=\left(n\pm\sqrt{n^2-1}\right)i$ 1p

$z_1=\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)i\notin M$, $z_1=\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)i\in M$ 1p

b) 2p, din care:

$E(z_1,z_2)-E(z_2,z_1)=(z_1-z_2)\left(\frac{1}{1-\overline{z}_1\cdot z_2}+\frac{1}{1-\overline{z}_2\cdot z_1}\right)\in\mathbb{R}$ și $\frac{1}{1-\overline{z}_1\cdot z_2}+\frac{1}{1-\overline{z}_2\cdot z_1}\in\mathbb{R}$ 1p

presupunând că $\frac{1}{1-\overline{z}_1\cdot z_2}+\frac{1}{1-\overline{z}_2\cdot z_1}=0$, se obține $\overline{z}_1\cdot z+\overline{z}_2\cdot z_1=2$ și de aici

$2=\left|\overline{z}_1\cdot z_2+\overline{z}_2\cdot z_1\right|\le\left|\overline{z}_1\cdot z_2\right|+\left|\overline{z}_2\cdot z_1\right|<2$, contradicție; deci rezultă că $z_1-z_2\in\mathbb{R}$ 1p

c) 3p, din care:

$\left|z_1-z_2\right|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=r_1^2+r_2^2-t$, $\left|1-\overline{z}_1z_2\right|^2=(1-\overline{z}_1z_2)(1-z_1\overline{z}_2)=1+r_1^2r_2^2-t$,

unde r_1,r_2 sunt modulele celor două numere complexe, iar $t=\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_2\in\mathbb{R}$ 2p

$\left|E(z_1,z_2)\right|<1\Leftrightarrow r_1^2+r_2^2<1+r_1^2r_2^2\Leftrightarrow\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)>0$- adevărat pentru orice $z_1,z_2\in M$ 1p

Problema 3.

Se consideră $S_n(x)=\cos x+\cos(2x)+\cos(3x)+...+\cos(nx)$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi\},k\in\mathbb{Z}$.

a) Rezolvați ecuația $S_3(x)=0$, pentru $x\in(0,2\pi)$.

b) Rezolvați inecuația $S_4(x)-S_2(x)\ge 0$, pentru $x\in(0,\pi)$.

c) Calculați $S_n(x)$.

SOLUȚIE:

a) 3p, din care:

$S_3(x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)\cdot(2\cos x+1)=0$ 1p

$x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{4}\right\}$ 2p

b) 2p, din care:

$S_4(x)-S_2(x)\ge 0\Leftrightarrow\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}\ge 0$ 1p

$x\in\left(0,\frac{\pi}{7}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{7},\frac{5\pi}{7}\right]$ 1p

c) $S_n(x)=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}$ 2p

Problema 4.

Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

a) Arătați că funcția f este strict monotonă.

b) Arătați că funcția f este inversabilă și determinați inversa ei.

c) Arătați că $f(x-1)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)>f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$.

SOLUȚIE:

a) 2p, din care:

$g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ este funcție strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ 1p

arcsin este strict crescătoare, deci f este strict descrescătoare 1p

b) 2p, din care:

f strict monotonă, deci injectivă 1p

Arată că f surjectivă și determină $f^{-1}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,0]$, $f^{-1}(x)=-\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 1p

c) 3p, din care:

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$ 1p

$x-1<x\Rightarrow f(x-1)>f(x)$, $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x+1}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)$ și adunând termen cu termen rezultă

$f(x-1)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)>0$ 1p

$f^{-1}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,0]\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\le 0$ 1p

<u>Notă</u>: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.*