MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ 12 mai 2018

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ și submulțimea $N=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)\middle| X^2=O_2\right\}$.

a) Verificați că $O_2\in N, A\in N$ și $I_2\notin N$.

b) Aflați numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.

c) Dacă $B\in N, B=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{c} & \hat{d}\end{pmatrix}$, arătați că $\mathrm{Tr}B=\hat{0}$ și $\det B=\hat{0}$ (unde $\mathrm{Tr}B=\hat{a}+\hat{d}$ și $\det B=\hat{a}\cdot\widehat{d}-\widehat{b}\cdot\hat{c}$).

d) Aflați cardinalul mulțimii *N*.

e) Găsiţi o matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ care nu se poate scrie ca o sumă finită de elemente din mulțimea *N*.

SOLUȚIE:

a) $O_2^2=O_2, A^2=O_2, I_2^2=I_2\neq O_2$. 3p

b) $\mathrm{Card}\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)=2^4=16$. 1p

c) $B^2=\begin{pmatrix}\hat{a}^2+\hat{b}\cdot\hat{c} & \hat{b}\cdot(\hat{a}+\hat{d})\\ \hat{c}\cdot(\hat{a}+\hat{d}) & \hat{d}^2+\hat{b}\cdot\hat{c}\end{pmatrix}; B^2=O_2\Rightarrow(\det B)^2=\hat{0}\Rightarrow\det B=\hat{a}\cdot\hat{d}-\hat{b}\cdot\hat{c}=\hat{0}$.

Dacă, prin absurd, $\mathrm{Tr}B=\hat{a}+\hat{d}\neq\hat{0}\Rightarrow\hat{b}=\hat{c}=\hat{0}$ și $\hat{a}=\hat{d}=\hat{0}$, contradicție. 1p

d) $\mathrm{Card}\,N=4$. 1p

e) Orice element din *N* are urma egală cu $\hat{0}$, deci o sumă finită de elemente din *N* are aceeași proprietate. Matricea $X=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$ satisface cerința, deoarece $\mathrm{Tr}X=\hat{1}$. 1p

Problema 2.

Fie $f\in\mathbb{Z}[X]$ astfel încât $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$. Demonstrați $f(n)\neq 31$, oricare ar fi numărul întreg *n*.

SOLUȚIE:

$f-1=(X-1)\cdot(X-2)\cdot(X-3)\cdot(X-4)\cdot g$, unde $g\in\mathbb{Z}[X]$. 3p

Dacă, prin absurd, ar exista $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(n) = 31$, obținem $30 = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot g(n)$.
.... 2p

Ultima identitate este imposibilă, deoarece în membrul drept avem produsul a patru numere întregi consecutive, deci un multiplu de 8, iar 30 nu este multiplu de 8. .... 2p

Problema 3.

a) Să se arate că $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2 + x + 1\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln\left(x^2 - x + 1\right) \mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^4 + x^2 + 1\right) \mathrm{d}x$.

(Gazeta Matematică 2/2018)

SOLUȚIE:

a) Folosim schimbarea de variabilă $x = -t$. 3p

b) $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^4 + x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln\left(\left(x^2+1\right)^2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \ln\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) \mathrm{d}x =$

$= \int_{-1}^{1} \left(\ln\left(x^2 + x + 1\right) + \ln\left(x^2 - x + 1\right)\right) \mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2 + x + 1\right) \mathrm{d}x$. 2p

Integrând prin părți, obținem că $2\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2 + x + 1\right) \mathrm{d}x = 3\ln 3 - 8 + \pi\sqrt{3}$. ……………….......................... 2p

Problema 4.

Teodor amenajează un loc de joacă pentru hamsterul său, în forma unui triunghi isoscel ABC cu vârful A fixat, iar vârfurile B, C variabile astfel încât $AB = AC = 1$, $BC = 2x$, $x \in (0,1)$. În interiorul triunghiului ABC Teodor plasează, într-un punct I aflat la egală distanță de laturi, un mic rezervor cu apă pentru hamster. Notăm cu r distanța de la I la cele trei laturi ale triunghiului ABC. Aflați valoarea maximă posibilă a numărului r.

(Toate distanțele din problemă sunt măsurate în metri).

SOLUȚIE:

Cum I este egal depărtat de laturile triunghiului ABC, rezultă că I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC și r este raza cercului înscris. 1p

$r = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{p} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x} = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 2p

Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Deoarece $f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) \cdot \frac{1}{-x^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \forall x \in (0,1)$, ... 1p

valoarea maximă a funcției f se obține pentru $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 2p

Maximul razei este $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$. 1p