MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1. Se dă matricea $A \in M_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, care satisface egalitatea: [1] $A^2 + 3 \cdot A - 2 \cdot I_2 = O_2$.

a) Demonstrați că $A^2 - (tr\ A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2$, unde $tr\ A = x + t$ (urma matricei A).
b) Dați exemple de matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, care satisfac egalitatea [1].
c) Demonstrați că matricea A este inversabilă.
d) Demonstrați că inversa matricei A^2 este matricea $A^{-2} = \frac{3}{4} \cdot A + \frac{11}{4} \cdot I_2$.
e) Calculați $\det\left(\frac{1}{4} \cdot A^2 + A^{-2}\right)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Calcul direct……………………………………………………………………………………......**1 p**
b) Căutăm matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu urma egală cu -3 și determinantul egal cu -2.
Exemple: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$…………………………………………………………….**2 p**
c) Din [1], rezultă că $A^2 + 3 \cdot A = 2 \cdot I_2 \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A + \frac{3}{2} \cdot I_2\right) = I_2 \Rightarrow (\exists) A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{3}{2} \cdot I_2$…………....**1 p**
d) $A^2 \cdot A^{-2} = (-3 \cdot A + 2 \cdot I_2) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot A + \frac{11}{4} \cdot I_2\right) = I_2$(calcul direct)…………………………………......**1 p**
e) $\det\left(\frac{1}{4} \cdot A^2 + A^{-2}\right) = \det\left(\frac{13}{4} \cdot I_2\right) = \frac{169}{16}$…………………………………………………………..…...**2 p**

Problema 2. Se consideră funcția $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$

a) Să se determine mulțimea maximă de existență a funcției f.
b) Să se studieze continuitatea funcției f pe această mulțime.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}(f(x))^{\frac{2}{|x-2|}}$.
d) Să se cerceteze existența limitei $\lim\limits_{x\to 2}(f(x))^{\frac{2}{x-2}}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $2 - |x-2| \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [0,4] \Leftrightarrow A = [0,4]$ este mulțimea maximă de existență a funcției f……………………………………………………………………………………**1 p**

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{4-x}}, & \text{dacă } x \in [0,2) \\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}, & \text{dacă } x \in [2,4] \end{cases}$ ……………………………………………………………..………...**2 p**

$\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 2} f(x) = f(2) = 1 \Leftrightarrow f$ este continuă în punctul $x_0 = 2$, deci pe mulțimea A………………..**1 p**

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{2-x}}=\frac{1}{e}$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\frac{4-x}{x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\frac{1}{e}$. Așadar, există $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{|x-2|}}=\frac{1}{e}$.......................................**1 p**

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{x-2}}=e$..**1 p**

Așadar, nu există $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\right)^{\frac{2}{x-2}}$..**1 p**

Problema 3. Se consideră triunghiul (ABC), determinat de următoarele drepte:

$$\begin{cases}(AB): x+2y-4=0\\ (BC): 3x+y-2=0\\ (AC): x-3y-4=0\end{cases}$$

a) Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului.
b) Să se determine ecuația înălțimii din vârful A.
c) Să se calculeze aria triunghiului (ABC).

BAREM DE CORECTURĂ

a) $(AB)\cap(AC)=\{A\}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-4=0\\ x-3y-4=0\end{cases}\Rightarrow A(4,0)$..**1 p**

$(AB)\cap(BC)=\{B\}\Rightarrow\begin{cases}x+2y-4=0\\ 3x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow B(0,2)$..**1 p**

$(AC)\cap(BC)=\{C\}\Rightarrow\begin{cases}x-3y-4=0\\ 3x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow C(1,-1)$..**1 p**

b) Înălțimea din vârful A are panta $m=-\frac{1}{m_{BC}}$, unde $m_{BC}=-3$...**1 p**

Ecuația înălțimii din vârful A este $y=\frac{1}{3}(x-4)\Rightarrow x-3y-4=0$..**1 p**

c) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4&0&1\\0&2&1\\1&-1&1\end{vmatrix}\right|=5$ (unități de arie)...**2 p**

<u>**Sau**</u> $m_{AC}=\frac{1}{3}$, $m_{AC}\cdot m_{BC}=-1\Rightarrow(AC)\perp(BC)$

$A_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2}=5$ (unități de arie)

Problema 4. O piesă a unui angrenaj are forma unui patrulater ale cărui vârfuri într-un reper cartezian ortogonal sunt punctele $A(2,2), B(9,1), C(14,6), D(1,5)$, iar unitatea de lungime în reper este de 1 cm.

a) Determinați coordonatele mijlocului M al diagonalei $[BD]$.
b) Demonstrați că punctele A, M, C sunt coliniare.
c) Determinați aria patrulaterului $(ABCD)$.
d) Dacă trei dintre vârfurile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram interior plăcii, determinați aria acestui paralelogram.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Reprezintă în reperul cartezian ortogonal punctele A, B, C, D..**1 p**
Determină $M(5,3)$..**1 p**
b) Verifică coliniaritatea punctelor A, M, C...**1 p**
c) Calculează aria unui triunghi format de trei dintre vârfurile patrulaterului.
$(A_{\Delta ABC}=20\text{ cm}^2;\ A_{\Delta ADC}=20\text{ cm}^2;\ A_{\Delta ADB}=10\text{ cm}^2;\ A_{\Delta CDB}=30\text{ cm}^2)$.......................................**1 p**
Calculează aria triunghiului rămas și determină $A_{ABCD}=40\text{ cm}^2$.................................**1 p**
d) Determină al patrulea vârf $P(8,4)$...**1 p**
Aria acestui paralelogram este $A_{p^*}=20\text{ cm}^2$..**1 p**

<u>Notă</u>: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*