MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
20 mai 2017

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Demonstrați că funcția f este impară și injectivă.
b) Demonstrați că funcția f este inversabilă și determinați inversa acesteia.
c) Rezolvați ecuația $e^x - e^{-x} = 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) f impară……………………………………………………………………..……..……**1 p**
f injectivă ………………………………………………………………………………….……**1 p**
b) f surjectivă, $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$…………………………………...……….…**2 p**
c) Ecuația este echivalentă cu $f(x) = f^{-1}(x), x \in \mathbb{R}$. Funcția și inversa au graficele simetrice față de prima bisectoare, intersecția lor va fi pe această dreapta, $x = 0$ este o soluție……..............................**2 p**
Pentru $x > 0$, graficul funcției f este deasupra primei bisectoare, ecuația nu are soluții, iar f este impară, deci nu are nici soluții negative……………………………………...………………………....**1 p**

Problema 2. În mulțimea numerelor complexe, să se rezolve ecuația:
$z^3 - \left(2\sqrt{3} + 3i\right) \cdot z^2 + \left(1 + 4\sqrt{3} \cdot i\right) \cdot z - 3i - 6\sqrt{3} = 0$, știind că admite rădăcini de forma $b \cdot i, b \in \mathbb{R}$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 2\sqrt{3} + 3i$.

BAREM DE CORECTURĂ

Fie $z = b \cdot i$, o rădăcină a ecuației.
Avem: $-b^3 \cdot i + \left(2\sqrt{3} + 3i\right) \cdot b^2 + \left(1 + 4\sqrt{3} \cdot i\right) \cdot bi - 3i - 6\sqrt{3} = 0$…………………………....……..…...**1 p**
Rezultă: $\left(2\sqrt{3} \cdot b^2 - 4\sqrt{3} \cdot b - 6\sqrt{3}\right) + i \cdot (-b^3 + 3b^2 + b - 3) = 0$.
Obținem: $\begin{cases} b^2 - 2b - 3 = 0 \\ b^3 - 3b^2 - b + 3 = 0 \end{cases}$…………………………………………………………………..……....**1 p**
Din prima ecuație, avem că $b_1 = -1, b_2 = 3$……………………………………………………........**1 p**
A doua ecuație se scrie:

$(b^3 - b) - 3(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow b(b^2 - 1) - 3(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow (b^2 - 1)(b - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = 3 \\ b_3 = 1 \end{cases}$ ……...…..**2 p**

Așadar, $\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -i \\ z_2 = 3i \end{cases}$…………………………………………………………………......…**1 p**
Din $z_1 + z_2 + z_3 = 2\sqrt{3} + 3i \Rightarrow z_3 = 2\sqrt{3} + i$……………………………………………..……......**1 p**

Problema 3. În mulțimea numerelor reale, să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_2(\log_2(5x-4)) = 1 + \log_2(\log_2 x)$.

b) $2^{\sqrt{\log_2(x+1)}} - 2 = 2 - (x+1)^{\sqrt{\log_{(x+1)} 2}}$.

BAREM DE CORECTURĂ

a) Condiții de existență: $\begin{cases} 5x-4>0 \\ x>0 \\ \log_2(5x-4)>0 \\ \log_2 x>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,\infty)$ .... **1 p**

Ecuația devine: $\log_2(\log_2(5x-4)) = \log_2(2\cdot\log_2 x) \Rightarrow \log_2(5x-4) = \log_2 x^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4$ .... **2 p**

b) Condiții de existență: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1 \neq 1 \\ \log_2(x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$ .... **1 p**

Notăm: $\log_2(x+1) = t > 0 \Rightarrow \log_{x+1} 2 = \frac{1}{t}$ .... **1 p**

Ecuația devine: $2^{\sqrt{t}} - 2 = 2 - (2^t)^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Rightarrow 2^{\sqrt{t}} = 2 \Rightarrow t = 1$ .... **1 p**

Din ecuația $\log_2(x+1) = 1 \Rightarrow x = 1$ .... **1 p**

Problema 4. Pe o masă sunt 5^n jetoane, $n \in \mathbb{N}^*$. Irina și Mihai joacă următorul joc: „fiecare are dreptul să ia $1, 2, 3,$ sau 4 jetoane și câștigă cel care efectuează ultima extragere”. După un timp de gândire, Irina își dă seama că poate câștiga, dacă Mihai face prima extragere.

a) Pentru $n = 2$, să se explice strategia Irinei și determinați numărul de extrageri efectuat de aceasta.

b) Determinați n, știind că Irina a avut nevoie de 125 de extrageri.

BAREM DE CORECTURĂ

a) $n = 2 \Rightarrow$ sunt 25 de jetoane

Fiecare poate lua cel puțin 1 jeton și cel mult 4 jetoane .... **1 p**

Irina va ține cont de numărul de jetoane extrase de Mihai, în așa fel încât numărul total de jetoane de la fiecare „rundă” să fie constant 5.

Dacă Mihai extrage a jetoane, Irina va extrage $5-a$ jetoane

$1 \le a \le 4$ și $1 \le 5-a \le 4$ .... **2 p**

	Mihai	Irina	Nr. total de jetoane
I	a_1	$5-a_1$	5
II	a_2	$5-a_2$	10
III	a_3	$5-a_3$	15
IV	a_4	$5-a_4$	20
V	a_5	$5-a_5$	**25**

$\Rightarrow 5$ extrageri .... **1 p**

b) Păstrând aceeași strategie, vor fi 125 „runde” .... **1 p**

Având în vedere că la fiecare „rundă” se extrag 5 jetoane, rezultă că vor fi în total $125 \cdot 5 = 625$ jetoane, de unde conchidem că $n = 4$ .... **2 p**

Notă: *Orice altă rezolvare corectă va fi punctată conform baremului.*