INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. În planul raportat la un reper cartezian (xOy) se consideră punctele $A(-3,1)$, $B(1,-1)$ şi $C(4,2)$.

a) Demonstraţi că nu există nicio funcţie al cărei grafic să fie reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$.

b) Determinaţi funcţia al cărei grafic este reuniunea segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

Soluţie.
a) O dreaptă verticală nu poate tăia graficul unei funcţii în mai multe puncte. În cazul nostru, axa Oy taie atât segmentul $[AB]$ cât şi segmentul $[AC]$. 3p

b) Domeniul funcţiei cerute este intervalul $[-3,4]$............ 1p

Pe fiecare dintre intervalele $[-3,1]$ şi $[1,4]$ funcţia este liniară, deci legea sa de corespondenţă este de forma $f(x)=ax+b$. 1p

Obţinem $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x+1}{2}, & x\in[-3,1]\\ x-2, & x\in(1,4]\end{cases}$. 2p

2. Numerele $x\in(0,2\pi)$ şi $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ sunt astfel încât $\dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\sin 3x}{b}=\dfrac{\sin 5x}{c}$.

a) Dacă $x\neq\pi$, demonstraţi că $a\cdot(a+b+c)=b^2$.

b) Determinaţi numărul x, ştiind că a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluţie.
a) Pentru $x\neq\pi$, toate cele trei rapoarte din enunţ sunt nenule. 1p

Dacă $\dfrac{1}{k}, k\in\mathbb{R}^*$ este valoarea lor comună, atunci $a(a+b+c)=k^2\cdot\sin x\cdot(\sin x+\sin 5x+\sin 3x)=$
$=k^2\cdot\sin x\cdot(2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x)=k^2\cdot\sin 3x\cdot\sin x\cdot(2-4\sin^2 x+1)=k^2\cdot\sin 3x\cdot(3\sin x-4\sin^3 x)=$
$=k^2\cdot\sin^2 3x=b^2$. 3p

b) Avem soluţia $x=\pi$. 1p

Dacă $x\neq\pi$, atunci $b^2=a(a+b+c)=a\cdot 3b$, prin urmare $b=3a$. Rezultă că $\sin 3x=3\sin x$, de unde $\sin x=0$, contradicţie. 2p

3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, având centrul cercului circumscris O şi centrul de greutate G. Dacă M este un punct oarecare din plan, definim punctul M' prin relaţia $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) Dacă M este situat pe cercul de rază R circumscris triunghiului ABC, arătaţi că punctul asociat M' aparţine cercului de centru A şi rază $2R$.

Soluţie.

a) $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GM} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) =$

$= 2\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = 2\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MG}$ 3p

b) Din relaţia de la punctul a), punctele M, G şi M' sunt coliniare, astfel încât $GM' = 2GM$.
.... 1p

O fiind mijlocul ipotenuzei BC, punctele A, G şi O sunt şi ele coliniare, cu $AG = 2GO$. 1p

Rezultă că triunghiurile AGM' şi OGM sunt asemenea. Deducem că $AM' = 2OM = 2R$ şi, de aici, concluzia problemei. 2p

4. O foaie de tablă are forma unui dreptunghi cu lungimea de 12 m şi lăţimea de 4 m. Decupând această foaie obţinem, fără pierderi, cinci dreptunghiuri care constituie cele cinci feţe ale unui rezervor paralelipipedic fără capac. Determinaţi volumul acestui rezervor, ştiind că este maxim posibil.

Soluţie.

Fie x şi y dimensiunile bazei paralelipipedului, iar z înălţimea acestuia; atunci $xy + 2xz + 2yz = 48$ şi $V = xyz$ este maxim posibil. 2p

Din inegalitatea mediilor obţinem că $4V^2 = (xy)(2xz)(2yz) \le \left(\dfrac{xy + 2xz + 2yz}{3}\right)^3 = 16^3$, prin urmare $V \le 32$. 3p

În inegalitatea mediilor avem egalitate dacă şi numai dacă $xy = 2xz = 2yz = \dfrac{48}{3}$, adică atunci când $x = y = 4$, $z = 2$. Prin urmare, $V_{\max} = 32\ \text{m}^3$ se atinge dacă din foaia iniţială se taie un pătrat cu latura de 4 m şi patru dreptunghiuri cu lungimea de 4 m şi lăţimea de 2 m. 2p