CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Într-un mediu de cultură sunt, la momentul $t_0 = 0$, 300 bacterii. Numărul de bacterii la momentul $t > 0$ este dat de funcția $n:[0,\infty)\to(0,\infty), n=n(t)$, funcție care satisface relația $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t), (\forall)t\ge 0$.

a) Determinați $n(t)$.

b) Demonstrați că pentru $t\ge 20$, numărul bacteriilor din mediu este mai mare decât 2015.

2. Se considera mulțimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{Z}_3) \mid X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\right\}$

a) Să se demonstreze că $P+Q\in G$ şi $P\cdot Q\in G, \quad \forall P,Q\in G$;

b) Să se rezolve ecuația $X^2=I_2, X\in G$;

c) Să se demonstreze ca produsul tuturor matricelor din G, diferite de O_2, nu depinde de ordinea lor şi să se calculeze acest produs.

3. Se considera polinomul: $f_n=1+\frac{X}{1!}+\frac{X(X+1)}{2!}+...+\frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}\in\mathbb{C}[X], n\in\mathbb{N}$ şi matricea $A\in M_3(\mathbb{C})$ cu $A^4=O_3$.

a) Să se demonstreze că $f_n=\frac{1}{n!}(X+1)\cdot(X+2)\cdot...\cdot(X+n)$ pentru oricare $n\in\mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_3-x\cdot A)=1, \forall x\in\mathbb{C}$,

c) Să se calculeze $\det(f_3(A))$,

4. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\ln x$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=ax^2\ln x+bx^2$ să fie o primitivă a lui f.

b) Să se determine aria suprafeței cuprinsă între graficul lui f, axa (Ox) şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

c) Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to[0,\ln 2], f(x)=\ln(1+tgx)$. Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*